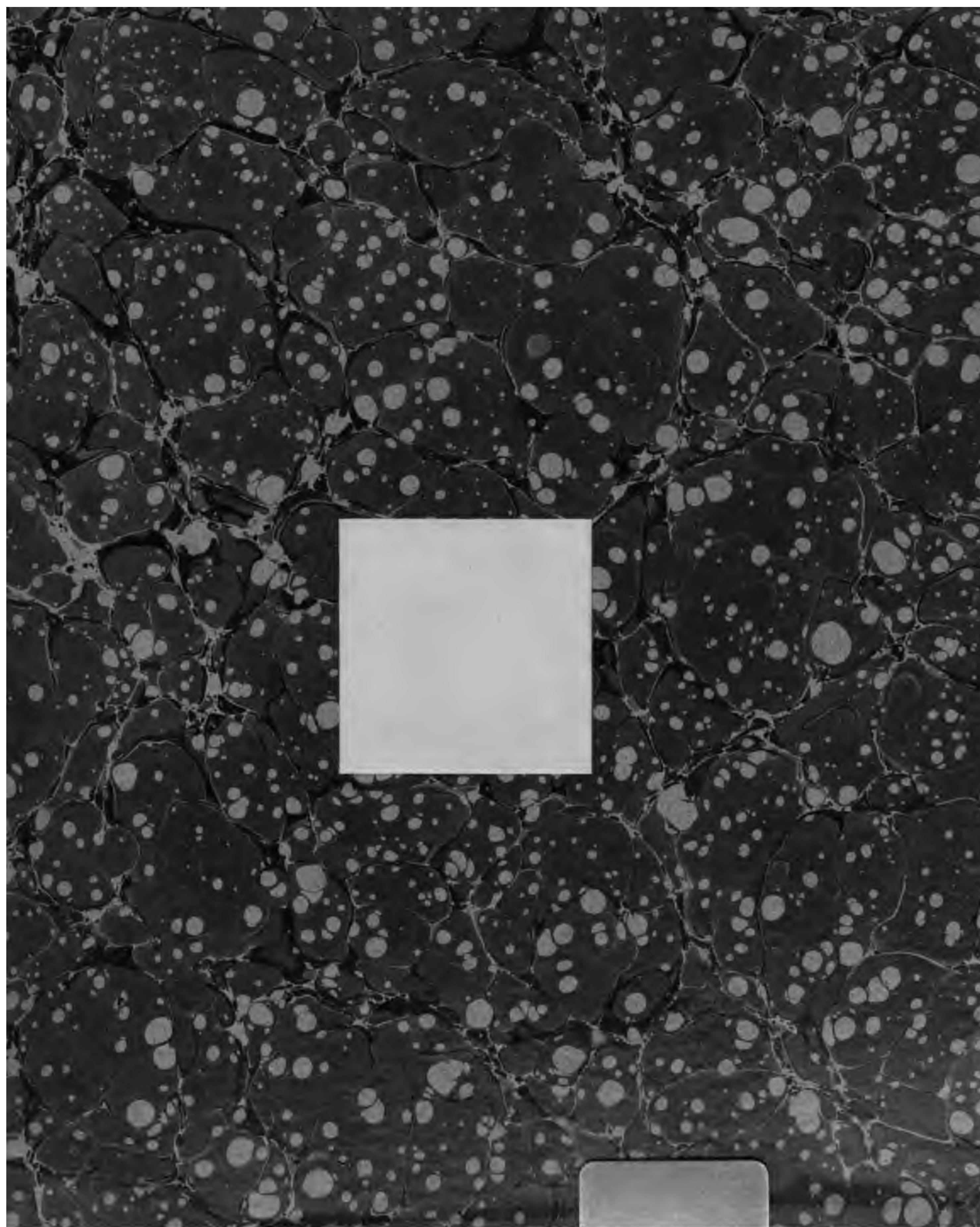
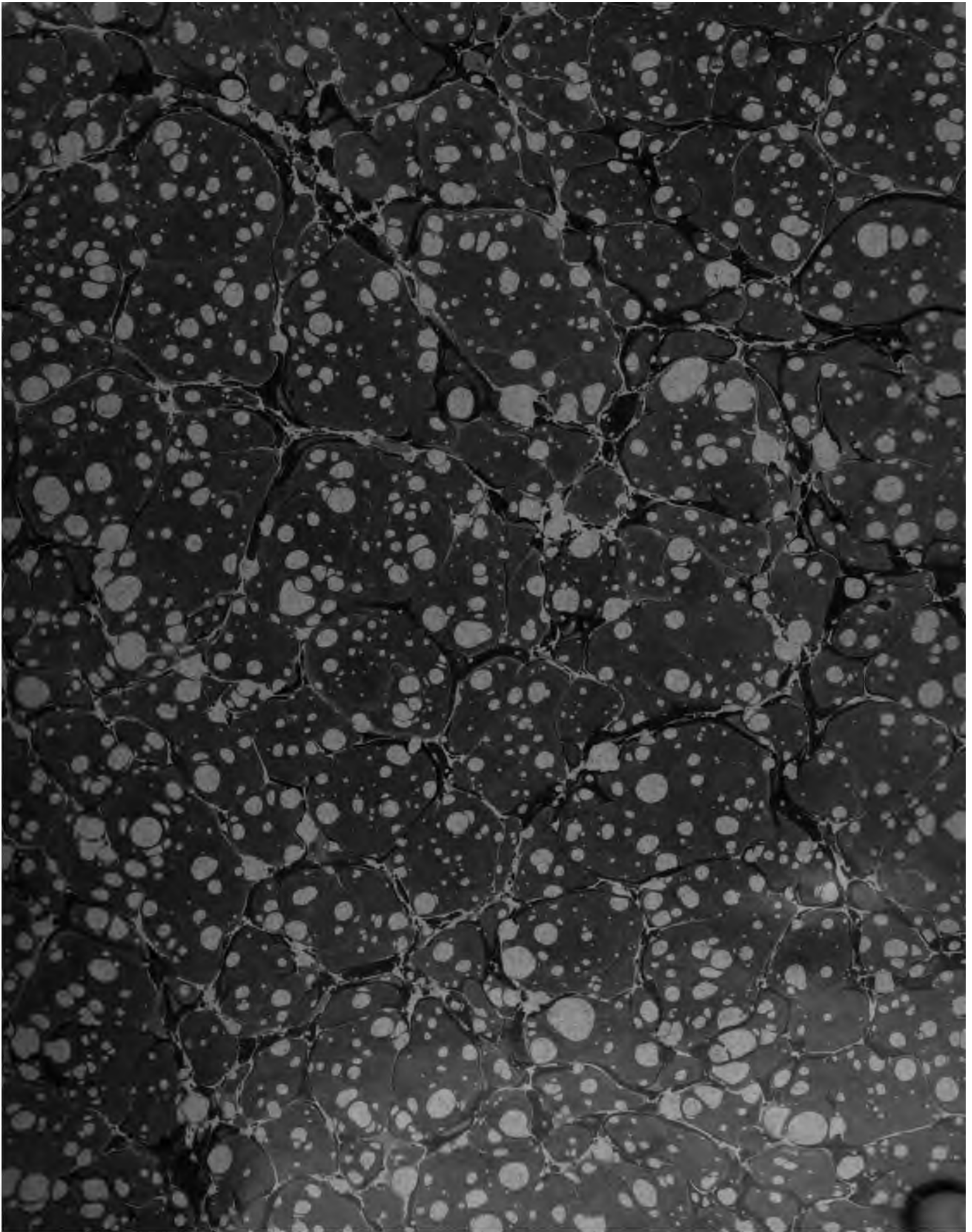

Stanford University Libraries
3 6105 000 820 584





K



41134 1730

# ACTA

# MATHEMATICA

# ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

---

22


STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1899.

BERLIN

MAYER & MÜLLER.

MARKGRAFENSTRASSE 51.

PARIS

A. HERMANN.

8 RUE DE LA SORBONNE.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

# L'OEUVRE MATHÉMATIQUE DE WEIERSTRASS

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

## 1.

Ce qui me frappe dans la carrière mathématique de Weierstrass, c'est la remarquable unité de la pensée, persistant à travers l'étendue et la variété de son oeuvre.

Dès le début, il s'est proposé un but bien déterminé, il a créé des méthodes pour l'atteindre; et, s'il a essayé quelquefois ces méthodes sur d'autres problèmes, il n'a jamais perdu de vue l'objet final de ses recherches.

Au reste il a pris soin lui-même de nous en avertir.

En 1857, il entrait à l'Académie de Berlin et dans son discours de réception, il s'exprimait ainsi:

»Je dois maintenant expliquer en quelques mots quelle a été jusqu'ici la marche de mes études et dans quelle direction je m'efforcerai de les poursuivre.

Depuis le temps, où sous la direction de mon maître Gudermann, je fis pour la première fois connaissance avec la théorie des fonctions elliptiques, cette branche nouvelle de l'Analyse mathématique a exercé sur mon intelligence un puissant attrait dont l'influence sur le développement de ma pensée a été décisive.

Cette discipline, fondée par Euler, cultivée avec ardeur et succès par Legendre, s'était d'abord étendue dans une direction unique; mais elle venait depuis dix ans d'être bouleversée entièrement par l'introduction des fonctions doublement périodiques découvertes par Abel et Jacobi. Ces transcendantes, dotant l'Analyse de grandeurs nouvelles dont les

propriétés sont remarquables, trouvaient aussi des applications en Géométrie et en Mécanique, et montraient par là qu'elles étaient le fruit normal d'un développement naturel de la science.

Mais Abel, habitué à se placer toujours au point de vue le plus élevé, avait trouvé un théorème qui s'étend à toutes les transcendantes résultant de l'intégration des différentielles algébriques et qui est pour elles en quelque sorte ce qu'est celui d'Euler pour les fonctions elliptiques. Enlevé à la fleur de l'âge, il n'avait pu poursuivre lui-même sa grande découverte, mais Jacobi en avait bientôt fait une seconde non moins importante; il avait démontré l'existence de fonctions périodiques de plusieurs arguments dont les propriétés principales sont fondées sur le théorème d'Abel et par là il avait fait connaître la véritable signification de ce théorème.

La représentation effective de ces grandeurs, dont l'analyse n'avait encore aucun exemple, l'étude détaillée de leurs propriétés devenait donc l'un des problèmes fondamentaux des Mathématiques; et, dès que j'en eus compris le sens et l'importance, je résolus de m'y essayer.

C'eût été une véritable folie, si j'avais seulement voulu penser à la solution d'un pareil problème, sans m'y être préparé par une étude approfondie des moyens qui devaient m'y aider et sans m'être exercé d'abord sur des problèmes moins difficiles...»

Ainsi, il a eu depuis ses débuts, l'ambition de créer une théorie complète et cohérente des fonctions abéliennes. Dès son entrée dans la carrière, encore élève de Gudermann, il voit avec netteté le but vers lequel il marchera toute sa vie, il ne l'oubliera jamais et cherchera sans cesse à s'en rapprocher.

On croirait voir un savant ingénieur attaquant une place très forte; à travers la complication des travaux d'approche, à travers les longues péripéties du siège, l'unité de sa pensée persiste et reste toujours visible.

Cependant, bien entendu, les instruments qu'il créait ainsi pouvaient servir à bien d'autres besognes; à droite et à gauche de la grande route qu'il suivait, il a ouvert bien des voies latérales et il s'y est engagé assez avant pour nous montrer où elles conduisaient. Il y a guidé les premiers pas de ses élèves et leur a assigné à chacun un but. Aussi quelque nombreux qu'aient été ces élèves, son héritage a été assez riche pour que chacun d'eux ait pu s'y tailler une large part.

## 2.

Pour atteindre son but, le grand géomètre avait trois échelons à gravir:

1°. Approfondir la théorie générale des fonctions, d'abord celle des fonctions d'une variable, puis celle des fonctions de deux variables; c'était là la base sur laquelle toute la pyramide devait s'élever.

2°. Les fonctions abéliennes étant l'extension naturelle des fonctions elliptiques, il fallait perfectionner la théorie de ces dernières transcendantes et la mettre sous une forme où la généralisation devînt facile.

3°. Il restait enfin à attaquer les fonctions abéliennes elles-mêmes.

## 3.

Mais ce serait mal le comprendre que de penser qu'en poursuivant un dessein unique, il a négligé les autres parties de l'Analyse. Quand il abordait d'autres problèmes, ce n'était pas uniquement pour s'exercer, comme pourrait le faire croire une des phrases de son discours académique que j'ai citées plus haut. Nul au contraire n'avait l'esprit plus large, et, s'il restait ainsi attaché à son plan de campagne, c'est qu'il en attendait des résultats d'une portée universelle.

Tel un général marche directement sur la capitale de l'ennemi, sachant bien que, dès qu'il l'aura atteinte, tout le pays tombera en son pouvoir.

Il rêvait donc sinon pour lui-même, au moins pour ses successeurs, de bien plus vastes conquêtes. Si ces espérances, qui à ses débuts devaient lui sembler bien lointaines, ont fini par se réaliser en grande partie, c'est qu'il n'est pas resté seul. Son enseignement a formé de nombreux disciples, et a donné au maître toute une armée, qui acceptait sa direction, et qu'il lançait en avant, ne pouvant aller partout lui-même.

C'est pour cela qu'il est si difficile de rendre un compte exact des travaux mathématiques de Weierstrass; ce n'est pas seulement parce que son oeuvre imprimée est considérable; c'est surtout parce que cette oeuvre ne le contient pas tout entier.

Longtemps les plus importants de ses ouvrages sont restés inédits et c'était dans son enseignement oral qu'il prodiguait les trésors de sa science; que de richesses encore aujourd'hui, ne nous sont conservées que par la mémoire de ses auditeurs.

Heureusement les élèves se pressaient en foule autour de sa chaire et allaient ensuite porter au loin son influence. L'esprit de Weierstrass inspirait aussi non seulement ceux qui avaient eu le bonheur d'entendre sa parole, mais ceux qui n'en avaient reçu qu'un écho indirect. Aussi dans l'oeuvre de beaucoup d'entre nous, il pourrait légitimement revendiquer une part.

Dans ses dernières années, sa santé l'avait obligé à abandonner cet enseignement; il vieillissait entouré du respect et de l'admiration de tous, s'occupant tranquillement de la publication de ses travaux avec la joie de voir son oeuvre continuée par les hommes qu'il avait animés de son esprit.

## Théorie des fonctions.

### 4.

Au commencement du siècle, l'idée de fonction était une notion à la fois trop restreinte et trop vague. D'une part en effet les fonctions discontinues, les fonctions dépourvues de dérivées, ou étaient inconnues ou étaient regardées comme des créations purement artificielles, indignes de l'attention du géomètre.

On excluait donc de l'analyse tout un domaine qu'elle s'est depuis annexé; mais d'autre part on aurait été bien embarrassé s'il s'était agi d'énoncer, d'une manière nette et précise, les conditions nécessaires et suffisantes pour conférer à une fonction le droit de cité. La frontière entre les fonctions analytiques et les autres était loin d'être complètement tracée.

En réalité, comme par un héritage dû aux fondateurs du calcul infinitésimal, qui s'étaient d'abord préoccupés des applications, on se reportait inconsciemment au modèle qui nous est fourni par les fonctions considérées en mécanique et on rejetait tout ce qui s'écartait de ce modèle; on n'était pas guidé par une définition claire et rigoureuse, mais par une sorte d'intuition et d'obscur instinct.

Cette définition, il fallait la donner; car l'analyse ne pouvait qu'à ce prix acquérir la parfaite rigueur.

Aujourd'hui tout est bien changé; on distingue deux domaines, l'un sans limites, l'autre plus restreint, mais mieux cultivé. Le premier est celui de la fonction en général, le second celui de la fonction analytique. Dans le premier, toutes les fantaisies sont permises et à chaque instant nos habitudes sont heurtées et nos associations d'idées rompues; nous y apprenons ainsi à nous défier de certains raisonnements par à peu près qui paraissaient convaincants à nos pères; à nous abstenir de telles conclusions qui leur auraient paru légitimes. Dans le second, au contraire, ces conclusions sont permises; mais *nous savons pourquoi;* il a suffi de placer au début une bonne définition; et on a vu reparaître une rigoureuse logique.

Voilà le chemin parcouru; nous allons voir comment Weierstrass a contribué à nous y guider.

Je citerai d'abord une note lue à l'Académie de Berlin le 18 juillet 1872, et où Weierstrass a cité des exemples de fonctions continues d'un argument réel, qui pour aucune valeur de cet argument, ne possèdent une dérivée déterminée.

Il y a cent ans, une pareille fonction eut été regardée comme un outrage au sens commun. Une fonction continue, aurait-on dit, est par essence susceptible d'être représentée par une courbe et une courbe a évidemment toujours une tangente.

Un pareil raisonnement n'a aucune valeur mathématique; il est fondé sur une intuition, ou plutôt sur une représentation sensible. Mais cette représentation est grossière et trompeuse.

Nous croyons nous représenter une courbe sans épaisseur; mais nous ne nous représentons qu'un trait d'une faible épaisseur. Nous voyons de même la tangente sous la forme d'une bande rectiligne de faible épaisseur; et quand nous disons qu'elle touche la courbe, nous voulons dire simplement que ces deux bandes empiètent l'une sur l'autre sans se traverser. Si c'est là ce qu'on appelle une courbe et une tangente, il est clair que toute courbe a une tangente; mais cela n'a plus rien à voir avec la théorie des fonctions.

On voit à quelles erreurs nous expose une folle confiance dans ce qu'on prend pour l'intuition. Par la découverte de cet exemple frappant, Weierstrass nous a donc donné un utile avertissement et nous a appris

à mieux apprécier les méthodes impeccables et purement arithmétiques dont il a, plus que personne, contribué à doter la Science.

Du même coup, il enrichissait le domaine des fonctions non analytiques, où tant de surprises nous attendent encore.

## 5.

Mais ce n'était là qu'une courte excursion hors du chemin si droit qu'il s'était tracé et dont il ne s'est jamais longtemps écarté.

Sur ce chemin, ce qu'il rencontrait, c'était le domaine des fonctions analytiques, qu'il devait d'abord explorer à fond, s'il voulait atteindre son but.

La théorie moderne des fonctions analytiques a eu quatre fondateurs, Gauss, Cauchy, Riemann et Weierstrass.

Gauss n'a rien publié de son vivant; il n'avait pour ainsi dire rien communiqué à personne et ses manuscrits n'ont été retrouvés que longtemps après sa mort. Il n'a donc exercé aucune influence.

Les trois autres géomètres qui ont contribué à créer la notion nouvelle de fonction ont suivi des voies bien différentes.

Cauchy a précédé les deux autres et leur a montré le chemin; mais néanmoins les trois conceptions restent distinctes et cela est fort heureux, puisque nous avons ainsi trois instruments entre lesquels nous pouvons choisir et dont nous pouvons souvent combiner l'action.

Pour Cauchy la définition de la fonction conserve encore un peu de l'indécision qu'elle avait chez ses devanciers. Il impose seulement aux fonctions analytiques quelques conditions restrictives, comme celle d'avoir une dérivée continue. Tout repose sur un théorème très simple relatif aux intégrales imaginaires et sur la notion de résidu. Une fonction quelconque peut être représentée par une intégrale définie et devient ainsi maniable pour l'analyste, quelque vaguement définie qu'elle ait été au début. C'est là un avantage précieux et aujourd'hui encore les »résidus» nous donnent la solution de problèmes que nous ne pourrions résoudre sans eux.

La théorie de Cauchy contenait en germe à la fois la conception géométrique de Riemann et la conception arithmétique de Weierstrass, et

il est aisé de comprendre comment elle pouvait, en se développant dans deux sens différents, donner naissance à l'une et à l'autre.

Pour Riemann, l'image géométrique joue le rôle dominant; une fonction n'est qu'une des lois d'après lesquelles les surfaces peuvent se transformer; on cherche à se représenter ces transformations et non à les analyser; leur possibilité même n'est établie que par un raisonnement sommaire auquel on n'a pu, beaucoup plus tard, donner la rigueur qu'au prix de modifications profondes et de détours compliqués.

Weierstrass se place à l'extrême opposé; le point de départ est la série de puissances, »l'élément de la fonction» qui est confiné dans un cercle de convergence; pour poursuivre la fonction en dehors de ce cercle, nous avons le procédé de la continuation analytique; tout devient ainsi une conséquence de la théorie des séries et cette théorie est elle-même établie sur des bases arithmétiques et solides. Nous sommes débarrassés des doutes qui, au siècle dernier et dans la première moitié de ce siècle, assaillaient souvent les penseurs à propos des principes du calcul infinitésimal, et aussi de ceux que pouvait provoquer par ses lacunes la théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Tout cela n'est plus aujourd'hui que de l'histoire ancienne.

La conception de Weierstrass présente un double avantage:

1°. Elle est, comme nous venons de le voir, parfaitement rigoureuse et cette rigueur est obtenue par des moyens les plus simples.

2°. Elle s'adapte avec une grande facilité à la généralisation, et peut s'étendre aux fonctions de plusieurs variables.

Entre ces trois conceptions gardons-nous de choisir; chacune a son rôle nécessaire. Avec l'instrument de Riemann, l'intuition verra d'un seul coup d'oeil l'aspect général des choses; comme un voyageur qui examine du haut d'une montagne la topographie de la plaine qu'il va visiter et apprend de la sorte à s'y orienter. Avec l'instrument de Weierstrass, l'analyse éclairera successivement tous les recoins et y fera pénétrer l'absolue clarté.

En un mot, la méthode de Riemann est avant tout une méthode de découverte, celle de Weierstrass est avant tout une méthode de démonstration.

## 6.

La principale contribution de Weierstrass aux progrès de la théorie des fonctions est la découverte des *facteurs primaires*.

Les plus simples des transcendantes sont les fonctions entières qui n'ont de point singulier qu'à l'infini. Une pareille transcendante est toujours le produit d'une infinité de »facteurs primaires»; chacun de ces facteurs est lui-même le produit d'un polynôme du premier degré par une exponentielle dont l'exposant est un polynôme de degré $q$; le facteur primaire est dit alors de genre $q$.

A cette découverte se rattache la classification des fonctions entières en genres dont l'importance arithmétique a été récemment mise en évidence par M. Hadamard. Une fonction est de genre $q$, lorsque tous ses facteurs primaires sont de genre $q$ au plus.

Weierstrass a trouvé là également le moyen de construire une fonction entière ayant des zéros donnés.

A ce théorème se rattache directement celui de M. Mittag-Leffler sur les fonctions méromorphes.

Ces deux théorèmes permettent la construction facile des fonctions $\sigma(u)$ et $\wp(u)$ qui ont été comme nous le verrons plus loin, les principaux instruments de Weierstrass dans la théorie des fonctions elliptiques.

C'est sans doute cette perspective qui a dirigé dans cette voie les efforts du grand géomètre allemand; mais il en a retiré bien d'autres fruits. La portée de la méthode nouvelle dépassait en effet de beaucoup la question particulière qu'il avait voulu résoudre et pour laquelle il l'avait créée.

Elle s'étendit sans peine, grâce aux travaux personnels de Weierstrass et à ceux de M. Mittag-Leffler, aux fonctions qui présentent des points singuliers essentiels isolés, puis à celles qui admettent des singularités plus compliquées et même des lignes singulières.

C'est donc une des méthodes les plus générales de l'analyse.

C'est dans cet ordre d'idées que Weierstrass a été conduit à étudier la représentation des fonctions par les séries dont les termes sont des fractions rationnelles.

Il a, en multipliant les exemples, bien montré comment une pareille série peut représenter dans deux domaines différents deux fonctions différentes; à cette occasion, il a éclairci la notion des limites naturelles d'une fonction et par là la notion fondamentale de fonction analytique elle-même. C'est depuis ce mémoire que toute obscurité a enfin disparu.

## 7.

Mais, pour l'étude des transcendantes abéliennes, la théorie des fonctions d'une variable ne suffit pas; il faut approfondir celle des fonctions de plusieurs variables.

Aussi l'illustre géomètre allemand n'a cessé de s'en préoccuper; il devait y rencontrer des difficultés nouvelles; car il se trouvait privé de l'usage des facteurs primaires qui lui avaient été si utiles dans ses recherches sur les fonctions d'une seule variable.

Il a pu néanmoins, mettre hors de doute une foule de théorèmes qui lui étaient nécessaires pour son objet, et qu'on admettait souvent sans en avoir compris le véritable sens et la portée. Sa tâche lui a été facilitée par l'emploi continuel d'une des notions qu'il avait créées, celle des éléments de fonction.

## 8.

Pour avoir le droit de représenter ainsi toutes les fonctions par des séries et pour pouvoir sans crainte se servir de cette représentation dans toutes les questions de calcul intégral, il fallait faire voir qu'on peut égaler à une série de puissances toute fonction implicite tirée d'un système d'équations dont les premiers membres sont des séries de puissances; ou l'intégrale d'une équation différentielle dont les coefficients sont des séries de puissances. Cet important théorème devait être pour Weierstrass une des pierres fondamentales de son système.

On sait qu'il a été établi pour la première fois par Cauchy.

En 1842, Weierstrass publia une mémoire où il démontre de nouveau cette proposition d'une manière analogue à celle de Cauchy.

Il avait éte devancé à son insu par le savant français, mais il conserve néanmoins une large part d'originalité. L'uniformité de la con-

vergence, la façon dont les éléments de fonctions se déduisent les uns des autres par continuation analytique sont des questions qu'il étudie à fond.

D'un autre côté, au point de vue didactique, son mode d'exposition présente de grands avantages; sa »fonction majorante» est plus simple et plus maniable que celle de Cauchy; les inégalités du début sont tirées des propriétés élémentaires des séries, et non plus de la considération d'intégrales imaginaires. C'est là un progrès, il y avait intérêt à montrer quand cette considération est indispensable et quand on peut s'en passer.

On voit par cet exemple comment la façon dont le mathématicien allemand conçoit la fonction dérive de la conception de Cauchy, mais en l'allégeant d'un bagage inutile.

Weierstrass a appliqué lui-même cette méthode à une foule de questions et même à la démonstration de l'existence des racines d'une équation algébrique. Mais c'est surtout entre les mains de ses disciples qu'elle a donné ses principaux résultats. M[me] Kowalevski l'a appliquée aux équations aux dérivées partielles, et M. Fuchs aux équations différentielles linéaires avec le succès que l'on sait.

## 9.

Un dernier travail qui se rapporte indirectement à la théorie des fonctions est celui que l'illustre mathématicien a consacré au principe de Dirichlet. Par un exemple frappant, il a montré combien est fragile la démonstration de ce principe dont on s'était longtemps contenté.

C'est sur ce principe pourtant que Riemann avait voulu bâtir toute sa théorie des fonctions; cette assise fondamentale n'était pas solide et si on ne voulait la voir s'écrouler en entraînant tout l'édifice dans sa chute, il fallait soigneusement l'étayer; c'est ce qu'ont fait depuis M. Schwarz et d'autres disciples de Weierstrass.

## Fonctions elliptiques.

## 10.

La forme que Jacobi avait donnée à la théorie des fonctions elliptiques était loin d'être parfaite; les défauts en sautent aux yeux.

A la base nous trouvons trois fonctions fondamentales sn, cn et dn. Ces fonctions n'ont pas les mêmes périodes; pour l'une $4K$ et $2iK$, pour l'autre $4K$ et $2K + 2iK'$; pour la troisième $2K$ et $4iK'$. Si on veut les rapporter toutes trois à un même système de périodes, il faut prendre $4K$ et $4iK'$; mais parmi les transcendantes qui admettent ces périodes, les fonctions de Jacobi sn, cn, dn ne sont pas les plus simples; elles ont quatre infinis et les plus simples n'en ont que deux.

Dans le système de Weierstrass, au lieu de trois fonctions fondamentales, nous n'en avons plus qu'une $\wp(u)$ et c'est la plus simple de toutes celles qui ont mêmes périodes. Elle n'a qu'un seul infini double; et enfin sa définition est telle qu'elle ne change pas quand on remplace un système de périodes par un autre système équivalent; au contraire cette substitution produirait entre les fonctions de Jacobi des permutations dont la loi est inutilement compliquée.

Dans la plupart des problèmes, il suffit de considérer $\wp(u)$ et l'introduction de sn, cn, dn ne serait qu'une cause artificielle de complication. Sans doute il en est d'autres où cette introduction serait plus naturelle; mais dans ceux-là même, Weierstrass les remplace avec avantage par les trois fonctions

$$\sqrt{\wp(u) - e_1}\,,\ \sqrt{\wp(u) - e_2}\,,\ \sqrt{\wp(u) - e_3}.$$

Les formules qui les relient les unes aux autres sont remarquablement symétriques et peuvent se déduire les unes des autres par permutation circulaire. Il n'en était pas de même avec les anciennes transcendantes sn, cn, dn; le module entrait dans la relation qui relie sn à dn, il n'entrait pas dans celle qui relie sn à cn. Rien ne justifiait cette dissymétrie qui était parfois gênante.

## 11.

D'autre part, le rôle prépondérant que joue le module $k$ se comprend mal. Le module $k$ n'est pas la plus simple de toutes les fonctions modulaires, puisqu'à un même système de périodes peuvent correspondre plusieurs valeurs du module. Le rôle du module n'est pas le même par rapport aux deux périodes et il en résulte une dissymétrie artificielle dans les formules.

Pour calculer le module, il faut résoudre une équation du 4[e] degré; cette résolution est évitée, si on prend pour arguments fondamentaux les coëfficients du premier membre de cette équation, ou plutôt les invariants de ce polynôme. Ce sont ces invariants que Weierstrass a appelés $g_2$ et $g_3$. L'invariant absolu

$$J = \frac{g_2^3}{g_3^2}$$

est la plus simple de toutes les fonctions modulaires; c'est l'élément essentiel et naturel qui doit remplacer $k$, comme $\wp(u)$ a remplacé sn, cn, dn.

## 12.

Une autre catégorie de transcendantes dont l'importance est fondamentale, ce sont les fonctions $\Theta$. Là encore les notations de Jacobi ne sont pas sans inconvénient. Les formules de transformation rebutent la mémoire par leur défaut de symétrie.

Les quatre fonctions $\Theta$ et $H$ de Jacobi ne sont qu'un cas particulier de fonctions beaucoup plus générales, les fonctions $\Theta$ des différents ordres, comme M. Hermite l'a montré dans un mémoire aussi concis que substantiel. Mais ces fonctions de M. Hermite peuvent elles-mêmes être généralisées et il existe toute une catégorie de fonctions que Briot et Bouquet ont, je ne sais pourquoi, appelées intermédiaires et qui se reproduisent multipliées par une exponentielle quand la variable augmente d'une période.

Parmi elles, quelle est celle qui doit être choisie comme élément simple? Ce ne peuvent être les quatre fonctions de Jacobi dont les rapports sont les quantités sn, cn et dn déjà condamnées pour les raisons que nous avons exposées plus haut. Ce ne peut être non plus une des fonctions de M. Hermite, car dans ces fonctions les deux périodes ne jouent pas le même rôle; de sorte que ces transcendantes prennent une infinité de formes différentes quand on remplace un système de périodes par un autre équivalent.

Weierstrass s'est préoccupé dès ses débuts de ce choix d'un élément simple et il a adopté d'abord la fonction qu'il a appelée *Al* et qui ne change pas quand on change le système de périodes mais *de façon que le module reste le même.*

Il a abandonné plus tard cette fonction *Al* en même temps que le module lui-même, et il a choisi comme élément nouveau la fonction $\sigma$ qui, d'après sa définition, ne change pas quand on remplace le système des périodes par un autre système équivalent *quelconque*.

Les formules atteignent ainsi leur maximum de simplicité. Mais cependant la fonction $\sigma$ n'a pas définitivement détrôné les fonctions $\theta$ et en particulier celles de M. Hermite comme $\wp(u)$ a détrôné sn, cn et dn.

La simplicité du développement des $\theta$, la rapidité de la convergence, l'élégance de leurs propriétés, leur assure une place importante et de cette place elles ne seront jamais délogées.

Il faut seulement savoir passer rapidement de $\sigma$ aux $\theta$ et des $\theta$ à $\sigma$.

## 13.

Il y a bien des manières de commencer l'exposition de cette importante théorie. Celle que Weierstrass a préférée est bien curieuse; il se demande à quelles conditions une fonction peut admettre un théorème d'addition.

Cette prédilection s'explique aisément; car c'est ainsi qu'il se proposait d'introduire ses auditeurs dans le domaine des fonctions abéliennes quand il en aurait achevé la théorie; cette façon de présenter les choses lui plaisait par sa généralité, qui rendait facile l'extension qu'il avait en vue. On trouvera les formules de Weierstrass relatives aux fonctions elliptiques réunies dans un recueil que M. Schwarz publie avec un soin extrême; mais on ne se rendra complètement compte de la marche de ses idées qu'en se reportant aux mémoires originaux.

## Fonctions abéliennes.

## 14.

Weierstrass, comme je l'ai dit, s'est toute sa vie préoccupé des fonctions abéliennes; dans la première période de sa carrière, il s'efforce d'étendre à ces transcendantes, et en particulier aux fonctions hyperelliptiques, les propriétés connues de sn, cn et dn; à cette époque, il n'a

pas encore donné sa forme définitive à sa théorie personnelle des fonctions elliptiques; il devra donc plus tard remettre au point les résultats qu'il a obtenus alors.

Mais à ce moment survint la publication du mémoire de Riemann qui exerça une grande influence sur le développement de cette discipline. Les fonctions hyperelliptiques cessèrent de jouer un rôle à part dans les préoccupations des analystes et on envisagea les fonctions abéliennes engendrées par les courbes algébriques les plus générales. Mais les théorèmes déjà démontrés par Weierstrass s'y étendaient facilement.

Dans cet ordre d'idées, tout repose encore sur l'étude des intégrales abéliennes et sur celle des fonctions rationnelles de deux variables $x$ et $y$ liées par une relation algébrique. A cet ordre d'idées se rattache un important travail de Weierstrass dont les résultats sont exposés dans une lettre adressée à M. le Professeur Schwarz. Là sont définies les singularités vraiment essentielles des courbes algébriques, celles qui ne sont pas altérées par les transformations birationnelles et que l'on appelle aujourd'hui »points de Weierstrass». Le géomètre berlinois a montré également comment les rapports mutuels de ces singularités nous font connaître les transformations birationnelles d'une courbe en elle-même.

## 15.

Mais les fonctions abéliennes définies par Riemann ne sont pas les fonctions périodiques les plus générales, que la méthode de Riemann semble impuissante à atteindre. Nous savons en effet que le nombre des modules d'une courbe d'ordre $p$ est égal à $3p - 3$; le nombre des coefficients arbitraires d'une fonction $\theta$ à $p$ variables est égal à $\frac{p(p+1)}{2}$; ces deux nombres ne sont égaux que pour $p = 2$ et pour $p = 3$; pour $p > 3$, le second est plus grand que le premier. Il y a donc des fonctions $\theta$ qui ne correspondent pas à des courbes algébriques.

Weierstrass fut ainsi conduit à aborder la question par une autre voie et à chercher quelles sont les fonctions périodiques les plus générales. Et d'abord une première question se présente; combien une fonction de $n$ variables peut-elle avoir de périodes? Le problème avait été résolu par Jacobi qui avait montré que le nombre maximum de ces périodes

est $2n$. Weierstrass a donné une démonstration nouvelle du théorème de Jacobi et a nettement marqué les conditions dans lesquelles il est applicable.

Il s'est ensuite occupé d'étudier les propriétés des fonctions les plus générales qui dépendent de $n$ variables et admettent $2n$ périodes. Il a reconnu qu'elles jouissent de propriétés analogues à celles des transcendantes elliptiques.

Entre $n+1$ fonctions, qui ont mêmes périodes, il y a toujours une relation algébrique; d'où il suit d'abord que ces fonctions admettent un théorème d'addition et satisfont à des équations différentielles.

Enfin Weierstrass a démontré qu'une pareille fonction est toujours le quotient de deux séries $\theta$ et que les fonctions abéliennes les plus générales peuvent se déduire de celles de Riemann par le procédé connu de la »réduction des intégrales abéliennes».

Le but était atteint.

## Divers.

### 16.

Je m'étendrai peu sur les autres travaux de Weierstrass, malgré leur importance et leur variété.

Deux mémoires déjà anciens ont été consacrés aux facultés analytiques, qui avaient été l'objet de recherches nombreuses et anciennes, souvent assez mal conduites et qui se ramènent très simplement aux fonctions eulériennes.

La question des unités complexes a aussi occupé Weierstrass dans ses dernières années; on avait conçu de très grandes espérances à la suite de l'invention des nombres complexes; on en attendait les mêmes surprises qu'avaient données les imaginaires. Il faut y renoncer; on sait maintenant que tous les nombres complexes, je veux dire tous ceux dont la multiplication est commutative, se ramènent aux imaginaires et ne nous apprendront rien de plus.

La découverte de M. Hermite qui a démontré la transcendance de $e$, bientôt suivie de celle de M. Lindemann qui a établi la transcendance de $\pi$, attira il y a une quinzaine d'années, l'attention de tous les géo-

mètres; elle ne pouvait échapper à celle de Weierstrass qui a notablement perfectionné les démonstrations de ses devanciers.

Citons encore un mémoire sur la représentation des fonctions d'une variable réelle par des séries de polynômes; deux autres sur la théorie des formes quadratiques; un travail sur un problème de calcul des variations; un autre sur le théorème fondamental de la géométrie projective, etc.

Ces exemples suffiront pour montrer comment, en restant toujours fidèle au même esprit, il a touché à toutes les parties de la science mathématique et avec quelle souplesse s'adaptaient aux problèmes les plus divers les méthodes fécondes qu'il avait créées.

## Conclusions.

### 17.

En terminant cette rapide analyse, je voudrais pouvoir caractériser en quelques mots l'esprit qui dans tous leurs travaux a animé le maître et ses disciples.

C'est d'abord un souci constant d'une parfaite rigueur.

Pour cela, Weierstrass renonce à se servir de l'intuition, ou du moins ne lui laisse que la part qu'il ne peut lui ôter. Les notions intuitives sont analysées et réduites en leurs éléments; parmi ces éléments, les philosophes en trouveraient certainement qui conservent le caractère intuitif; mais ceux-là sont rejetés hors du domaine des mathématiques pures, qui peuvent se développer sans eux; les physiciens seuls auront à s'en occuper. Ceux qu'on conserve sont analysés à leur tour et cette analyse est poussée jusqu'à ce qu'on arrive à l'élément ultime, le nombre entier.

De là à l'égard de la géométrie une certaine méfiance qui est le caractère propre de l'Ecole de Berlin; pour ainsi dire elle ne cherche pas à voir, mais à comprendre.

Tout dérive donc du nombre entier et participe par conséquent de la certitude de l'arithmétique; le continu lui-même se ramène à cette origine et toutes les égalités qui font l'objet de l'Analyse et où figurent

des grandeurs continues ne sont plus que des symboles, remplaçant une multitude infinie d'inégalités entre nombres entiers.

Les notions analytiques sont donc pour Weierstrass, comme pour Kronecker, des constructions faites avec les mêmes matériaux, les nombres entiers. Mais il y a une différence entre les deux conceptions; Kronecker est surtout préoccupé de mettre en évidence le sens philosophique des vérités mathématiques; le nombre entier étant le fond de tout, il veut qu'il reste partout apparent; pour lui, les seules opérations licites sont l'addition et la multiplication; ce n'est que par une concession aux préjugés contemporains, qu'il consent quelquefois à admettre la division.

Tel n'est pas le point de vue de Weierstrass. Dès qu'il a élevé une construction, il oublie de quels matériaux elle est faite et n'y veut plus voir qu'une unité nouvelle dont il fera l'un des éléments d'une construction plus grandiose. Il peut le faire sans crainte, car il en a, une fois pour toutes, éprouvé la solidité.

Ces unités intermédiaires ne sont sans doute que des auxiliaires; mais notre esprit est si faible qu'il ne peut s'en passer; car il ne peut percevoir à la fois tous les détails d'un grand ensemble. Ces artifices sont donc nécessaires si l'on veut marcher toujours en avant et c'est là justement ce que veut Weierstrass. Kronecker, lui aussi, a fait bien des découvertes; mais s'il y est arrivé, c'est en oubliant qu'il était philosophe et en délaissant lui-même ses principes qui étaient condamnés d'avance à la stérilité.

Weierstrass procède donc par construction en partant du nombre entier; il marche ainsi toujours du simple au composé. Il se distingue par cette tendance d'autres analystes qui partent du général et de l'indéterminé et qui le déterminent ensuite de plus en plus par des hypothèses restrictives. De là le contraste entre sa façon de concevoir la fonction analytique et celle de ses devanciers.

Une autre pensée semble l'avoir guidé.

En 1875, il écrivait à M. Schwarz:

»Plus je réfléchis aux principes de la théorie des fonctions — et c'est ce que je fais sans cesse — plus je suis solidement convaincu qu'ils sont bâtis sur le fondement des verités algébriques et que, par conséquent, ce n'est pas le véritable chemin, si inversement on fait appel au transcendant pour établir les théorèmes simples et fondamentaux de

l'Algèbre; et cela reste vrai, quelque pénétrantes que puissent paraître au premier abord les considérations par lesquelles Riemann a découvert tant d'importantes propriétés des fonctions algébriques.»

Je pourrais citer d'autres exemples où il s'est inspiré de la même idée. Il est constamment efforcé d'aller au but par le chemin le moins détourné, qui n'est pas toujours le plus rapide ni le plus élégant, mais qui est le seul logique.

---

# ÜBER DIE INTEGRATION PARTIELLER LINEARER DIFFERENTIAL-GLEICHUNGEN DURCH VIELFACHE INTEGRALE

VON

HJ. MELLIN

in HELSINGFORS.

In der vorliegenden Arbeit beabsichtigen wir zu zeigen, dass die vielfachen Integrale mit veränderlichen Parametern in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen (mit rationalen Coefficienten) formell ebenso verwendet werden können, wie die einfachen Integrale schon längst in der Theorie der gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen benutzt worden sind.

Ebenso wie die bekannte LAGRANGE'sche Beziehung zwischen adjungirten Differentialausdrücken als die gemeinsame Quelle der in der letztgenannten Theorie angewandten Methoden der Integration durch bestimmte Integrale zu betrachten ist,[1] giebt es auch für partielle lineare Differentialausdrücke eine analoge Beziehung, aus welcher mit Benutzung vielfacher Integrale ähnliche Folgerungen gezogen werden können, wie aus der ersteren mit Benutzung einfacher Integrale.

Der Kürze halber beschränken wir uns im Folgenden auf partielle lineare Differentialgleichungen mit *zwei* unabhängigen Veränderlichen. Man wird aber ohne Mühe finden, dass und wie sich alle Ergebnisse unserer Untersuchungen auch auf Gleichungen mit beliebig vielen Veränderlichen ausdehnen lassen.

[1] Man siehe SCHLESINGER, *Über die Integration linearer homogener Differentialgleichungen durch Quadraturen* (Crelles Journal, Heft 2, Bd. 116) sowie meine gleichzeitige Arbeit *Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten* (Acta Soc. Scient. Fenn., Tom. 21).

In einem folgenden Aufsatze werde ich zeigen, dass die auf Verwendung bestimmter Integrale basirte Integrationsmethode ebenfalls auf *Systeme* simultaner linearer Differentialgleichungen übertragen werden kann.

Die bestimmten Integrale können demgemäss nicht nur in der Theorie der gewöhnlichen sondern auch in der Theorie der partiellen linearen Differentialgleichungen, gleichviel ob es sich von einer einzigen Gleichung oder von einem Systeme simultaner Gleichungen handelt, den Potenzreihen als Ausdrücke an die Seite gestellt werden, welche zur Darstellung von Lösungen solcher Gleichungen geeignet sind.

## § 1.

Die LAGRANGE'sche Beziehung

$$\psi\sum_{k=0}^{n}P_k(x)\frac{d^k\varphi}{dx^k}-\varphi\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{d^k}{dx^k}[P_k(x)\psi]$$
$$=\frac{d}{dx}\sum_{k=1}^{n}\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\frac{d^\nu}{dx^\nu}[P_k(x)\psi]\frac{d^{k-1-\nu}\varphi}{dx^{k-1-\nu}}$$

ist eine nahe liegende Verallgemeinerung der vielfach angewandten Formel

$$\psi\frac{d^k\varphi}{dx^k}-(-1)^k\varphi\frac{d^k\psi}{dx^k}=\sum_{\nu=0}^{k-1}(-1)^\nu\frac{d}{dx}\left[\frac{d^\nu\psi}{dx^\nu}\,\frac{d^{k-1-\nu}\varphi}{dx^{k-1-\nu}}\right].$$

Auf der rechten Seite dieser Formel sind die einzelnen Glieder vollständige Ableitungen erster Ordnung. Aus dem Nachfolgenden wird sich ergeben, dass die rechte Seite ebenfalls auf eine Form gebracht werden kann, deren Glieder vollständige Ableitungen wachsender Ordnungszahl sind. Benutzt man zunächst der grösseren Allgemeinheit halber Differentiale an Stelle von Ableitungen, so überzeugt man sich durch den Schluss von $n$ auf $n+1$ von der Gültigkeit der Formel

$$(1)\qquad \psi d^k\varphi=(-1)^k\sum_{\nu=0}^{k}(-1)^\nu\binom{k}{\nu}d^\nu[\varphi d^{k-\nu}\psi],$$

deren Richtigkeit für $k=1$ und $k=2$ leicht bestätigt wird. Nach Transposition des ersten Gliedes der rechten Seite wird also die linke

Seite gleich einem vollständigen Differential erster Ordnung, nach Transposition der zwei ersten Glieder gleich einem vollständigen Differential zweiter Ordnung, u. s. f.

Nimmt man an, dass sich die in (1) bezeichneten Differentiationen auf eine einzige unabhängige Variable $x$ beziehen, so ergiebt sich durch Division mit $dx^k$

$$\psi \frac{d^k \varphi}{dx^k} = (-1)^k \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{d^\nu}{dx^\nu}\left[\varphi \frac{d^{k-\nu}\psi}{dx^{k-\nu}}\right].$$ [1]

Durch zweimalige Anwendung dieser Formel folgt

$$\psi \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = (-1)^h \sum_{\mu=0}^{h} (-1)^\mu \binom{h}{\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu}\left[\frac{\partial^{h-\mu}\psi}{\partial x^{h-\mu}} \frac{\partial^k \varphi}{\partial y^k}\right]$$

$$= (-1)^{h+k} \sum_{\mu=0}^{h} (-1)^\mu \binom{h}{\mu} \frac{\partial^\mu}{\partial x^\mu} \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \frac{\partial^\nu}{\partial y^\nu}\left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu}\partial y^{k-\nu}}\psi\right],$$

und es ist somit

$$(2) \qquad \psi \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = (-1)^{h+k} \sum_{\mu,\nu=0}^{h,k} (-1)^{\mu+\nu} \binom{h}{\mu}\binom{k}{\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu}\partial y^{k-\nu}}\psi\right].$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich die noch allgemeinere Beziehung

$$\psi \sum_{h,k=0}^{m,n} P_{hk}(x,y) \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k}$$

$$= \sum_{h,k=0}^{m,n} \sum_{\mu,\nu=0}^{h,k} (-1)^{h-\mu+k-\nu} \binom{h}{\mu}\binom{k}{\nu} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left[\varphi \frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu}\partial y^{k-\nu}}(P_{hk}\psi)\right],$$

welche als eine Erweiterung der LAGRANGE'schen Beziehung auf partielle lineare Differentialausdrücke zu betrachten ist. Transponirt man nämlich nach der linken Seite alle Glieder, wo $\mu$ und $\nu$ beide auf einmal gleich der Null sind, so kann diese Beziehung folgenderweise geschrieben werden

$$(3) \qquad \psi \sum_{h,k=0}^{m,n} P_{hk}(x,y) \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} - \varphi \sum_{h,k=0}^{m,n} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k}[P_{hk}(x,y)\psi]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} P(\varphi,\psi) + \frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi,\psi),$$

[1] Cf. HJ. HOLMGREN. Sv. Vet.-Akad. Hand. Bd. 5. N:o 11. (Formel 33).

wo $P$ und $Q$ gewisse in $\varphi$ und $\psi$ *bilineare* Differentialausdrücke bezeichnen. Die beiden auf der linken Seite stehenden Differentialausdrücke werden bekanntlich *adjungirte* Ausdrücke genannt.[1]

Die für gewöhnliche adjungirte Differentialausdrücke gültigen Sätze können auf partielle adjungirte ausgedehnt werden. So gilt auch für die letzteren der *Reciprocitätssatz*, nach welchem, falls ein Differentialausdruck aus mehreren zusammengesetzt ist, sein adjungirter aus den adjungirten der (symbolischen) Factoren in umgekehrter Reihenfolge zusammengesetzt ist.

In § 3. soll der Reciprocitätssatz wenigstens für einen speciellen, bei unseren Untersuchungen wichtigen Fall bewiesen werden.

*Anmerkung.* Es verdient besonders hervorgehoben zu werden, dass die Formel (1) überhaupt für jede iterirbare Operation $\vartheta$ gültig ist, welche den folgenden formalen Gesetzen gehorcht:

$$\vartheta(\varphi + \psi) = \vartheta\varphi + \vartheta\psi,$$
$$\vartheta(\varphi\psi) = \varphi\vartheta\psi + \psi\vartheta\varphi,$$
$$\vartheta \text{ Const.} \equiv 0.$$

Aus diesen Gleichungen folgt durch den Schluss von $n$ auf $n + 1$:

$$\psi\vartheta^k\varphi = (-1)^k \sum_{\nu=0}^{k} (-1)^\nu \binom{k}{\nu} \vartheta^\nu [\varphi\vartheta^{k-\nu}\psi].$$

Für solche Operationen $\vartheta$ gilt somit auch die LAGRANGE'sche Beziehung. Symbole derartiger Operationen sind $d, \frac{d}{dx}, xd, x\frac{d}{dx}$, sowie das LIE'sche Symbol einer infinitesimalen Transformation, wovon $x\frac{d}{dx}$ ein specieller Fall ist.

## § 2.

Bei den weiteren Untersuchungen werden ausschliesslich homogene lineare partielle Differentialgleichungen mit in $x$ und $y$ ganzen rationalen Coefficienten betrachtet. Es erweist sich dabei als sehr vortheilhaft, wenn

---

[1] C. f. DARBOUX, *Leçons sur la théorie générale des surfaces.* II. Partie, § 357.

man, ausser der gewöhnlichen, nach den Ableitungen der abhängigen Veränderlichen geordneten Form, ebenfalls zwei andere, sofort näher anzugebende Formen berücksichtigt, auf die eine solche Gleichung stets gebracht werden kann.

Wird eine homogene lineare partielle Differentialgleichung mit in $x$ und $y$ ganzen rationalen Coefficienten

$$\sum_{\mu,\nu,h,k} C_{\mu\nu}^{(hk)} x^\mu y^\nu \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = 0 \tag{4}$$

nach Potenzen der beiden unabhängigen Variabeln geordnet, so ergeben sich als Coefficienten Ausdrücke der Form

$$\sum_{h,k} C^{(hk)} \frac{\partial^{h+k}\varphi}{\partial x^h \partial y^k} = \sum_{h,k} C^{(hk)} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^h \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^k \varphi = f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi,$$

also homogene lineare Differentialausdrücke mit constanten Coefficienten. Unsere Differentialgleichung kann somit auf die symbolische Form gebracht werden

$$\sum_{h,k} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0.$$

Dies ist die eine der fraglichen Formen. Soll die Gleichung (4) auf die andere der betreffenden Formen gebracht werden, so multiplicirt man sie — falls in irgend einem Gliede die Zahl $\mu$ kleiner ist als $h$ oder die Zahl $\nu$ kleiner als $k$ — mit den niedrigsten ganzzahligen Potenzen von $x$ und $y$, die bewirken, dass $\mu$ und $\nu$ in keinem Gliede kleiner sind als resp. $h$ und $k$. Hierauf kann man auf jedes Glied der Differentialgleichung die bekannte Symbolische Formel anwenden: [1]

$$x^n \frac{d^n\varphi}{dx^n} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right) \dots \left(x\frac{d}{dx} - n + 1\right)\varphi.$$

Werden die einzelnen Glieder weiter nach Potenzen der beiden Symbole

[1] Bekanntlich benutzt man die Symbolik

$$\left(x\frac{d}{dx}\right)^n \varphi = x\frac{d}{dx} x\frac{d}{dx} \dots x\frac{d}{dx}\varphi,$$

welche also mit $x^n \dfrac{d^n\varphi}{dx^n}$ nicht verwechselt werden darf.

$x\frac{\partial}{\partial x}$ und $y\frac{\partial}{\partial y}$ entwickelt, so kann die Differentialgleichung auf die Form gebracht werden:

$$\sum_{\mu,\nu,h,k} C_{\mu\nu}^{(hk)} x^{\mu} y^{\nu} \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{h} \left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} \varphi = 0.$$

Wird die linke Seite ferner nach Potenzen von $x$ und $y$ geordnet, so ergeben sich als Coefficienten Ausdrücke der Form

$$\sum_{h,k} C^{(hk)} \left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^{h} \left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k} \varphi = F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi,$$

und die Differentialgleichung erhält schliesslich die Gestalt

$$\sum_{h,k} x^{h} y^{k} F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0.$$

Die beiden Arten von Ausdrücken $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$ und $F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$, die sich besonders in der englischen Litteratur finden, spielen in manchen Beziehungen die Rolle von *elementaren* Differentialausdrücken. Während ein aus zwei oder mehreren (nicht elementaren) Differentialausdrücken zusammengesetztes symbolisches Product sich im Allgemeinen mit der Reihenfolge seiner Factoren ändert, so sind die beiden Producte

$$f_1\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\dots f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi \quad \text{und} \quad F_1\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\dots F_n\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$$

von der Reihenfolge ihrer Factoren unabhängig.

Einige, diese elementaren Ausdrücke betreffende, bei den weiteren Untersuchungen erforderliche Formeln sollen hier hervorgehoben werden.

Beachtet man, dass $\frac{\partial^{m+n}}{\partial x^m \partial y^n} e^{ux+vy} = u^m v^n e^{ux+vy}$, so folgt leicht:

$$(5) \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) e^{ux+vy} = f(u, v) e^{ux+vy}.$$

Diese Formel lässt sich noch folgenderweise erweitern:

$$(6) \qquad f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)[g(x, y) e^{ux+vy}] = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)[f(u, v) e^{ux+vy}].$$

In der That ist nach (5):

$$f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)[g(x, y)e^{ux+vy}] = f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\left[g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)e^{ux+vy}\right]$$

$$= g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\left[f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)e^{ux+vy}\right] = g\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)[f(u, v)e^{ux+vy}].$$

Die Gültigkeit der Formeln

(7) $$F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^\rho y^\sigma] = F(\rho, \sigma)x^\rho y^\sigma,$$

(8) $$F\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^\rho y^\sigma \varphi] = x^\rho y^\sigma F\left(x\frac{\partial}{\partial x} + \rho, y\frac{\partial}{\partial y} + \sigma\right)\varphi$$

wird dadurch erwiesen, dass man ihre Richtigkeit für Glieder der Form

$$C\left(x\frac{\partial}{\partial x}\right)^m\left(y\frac{\partial}{\partial y}\right)^n\varphi$$

bestätigt.

## § 3.

Die erweiterte Lagrange'sche Beziehung gestaltet sich nun besonders einfach für die oben besprochenen elementaren Differentialausdrücke.

Mit Benutzung von (2) erhalten wir

$$\psi\sum_{h,k=0}^{m,n} C_{hk}\frac{\partial^{h+k}}{\partial x^h \partial y^k}\varphi = \sum_{h,k=0}^{m,n}\sum_{\mu,\nu=0}^{h,k}(-1)^{h-\mu+k-\nu}C_{hk}\binom{h}{\mu}\binom{k}{\nu}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left[\varphi\frac{\partial^{h-\mu+k-\nu}}{\partial x^{h-\mu}\partial y^{k-\nu}}\psi\right]$$

$$= \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}\frac{1}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\left\{\varphi\sum_{h=\mu, k=\nu}^{m,n} h..(h-\mu+1)k...(k-\nu+1)C_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}\right)^{h-\mu}\left(-\frac{\partial}{\partial y}\right)^{k-\nu}\psi\right\}.$$

Diese Formel kann, wenn man zur Abkürzung

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} C_{hk}\rho^h\sigma^k = f(\rho, \sigma) \quad \text{und} \quad \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial\rho^\mu \partial\sigma^\nu}f(\rho, \sigma) = f^{(\mu,\nu)}(\rho, \sigma)$$

setzt, folgenderweise geschrieben werden

(9) $$\psi f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n}\frac{1}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}}\frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left\{\varphi f^{(\mu,\nu)}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)\psi\right\}.$$

Mit Hülfe dieser Formel ergiebt sich die verallgemeinerte LAGRANGE'sche Beziehung in der Form

$$\psi \sum_{h,k} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = \sum_{h,k} \sum_{\mu,\nu=0}^{m,n} \frac{1}{\underline{|\mu}\,\underline{|\nu}} \frac{\partial^{\mu+\nu}}{\partial x^\mu \partial y^\nu}\left\{\varphi f_{hk}^{(\mu,\nu)}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi\right\}.$$

Hier bezeichnen $m$ und $n$ zwei solche ganze Zahlen, dass keine der Functionen $f_{hk}(\rho, \sigma)$ in Bezug auf $\rho$ von höherem als dem $m^{\text{ten}}$ und in Bezug auf $\sigma$ von höherem als dem $n^{\text{ten}}$ Grade ist.

Transponirt man nun wieder nach der linken Seite alle Glieder, wo $\mu$ und $\nu$ beide auf einmal gleich der Null sind, so hat man

$$(10) \qquad \psi \sum_{h,k} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi$$
$$= \frac{\partial}{\partial x} P(\varphi, \psi) + \frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi, \psi),$$

wo $P$ und $Q$ in $\varphi$ und $\psi$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen.

Auf Grund der am Schlusse des § 1. gemachten Anmerkung leuchtet ohne weiteres ein, dass auch die folgende Beziehung stattfindet

$$(11) \qquad \psi \sum_{h,k} x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi \sum_{h,k} F_{hk}\left(-x\frac{\partial}{\partial x}, -y\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi$$
$$= x\frac{\partial}{\partial x} P(\varphi, \psi) + y\frac{\partial}{\partial y} Q(\varphi, \psi),$$

wo $P$ und $Q$ in $\varphi$ und $\psi$ bilineare Differentialausdrücke sind.

Der in § 1. erwähnte Reciprocitätssatz soll nunmehr für den Fall nachgewiesen werden, dass der betreffende Differentialausdruck aus elementaren Ausdrücken $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ zusammengesetzt ist. Aus (9) folgt, wenn wir der Kürze halber $f$ an Stelle von $f\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)$ schreiben und den adjungirten von $f$, also den Ausdruck $f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)$, allgemein durch $\bar{f}$ bezeichnen:

$$\psi f \varphi - \varphi \bar{f} \psi = \frac{\partial}{\partial x} P + \frac{\partial}{\partial y} Q,$$

wo $P$ und $Q$ in $\varphi$ und $\psi$ bilineare Differentialausdrücke bedeuten. Hier ersetze man, unter $u$ eine beliebige Function verstehend, $\varphi$ durch $ug\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$:

$$\psi f[ug\varphi] - [u\bar{f}\psi].g\varphi = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q$$

und wende auf das zweite Glied links die vorangehende Formel an, so folgt

$$\psi f[ug\varphi] - \varphi\bar{g}[u\bar{f}\psi] = \frac{\partial}{\partial x}P' + \frac{\partial}{\partial y}Q',$$

wo $P'$, $Q'$ in $\varphi$ und $\psi$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Hiermit ist der Reciprocitätssatz für den Fall bewiesen, dass der betreffende Differentialausdruck aus zwei elementaren zusammengesetzt ist, wenn wir nämlich als allgemeine Definition zweier adjungirten Differentialausdrücke $D(\varphi)$ und $\bar{D}(\psi)$ die Beziehung festsetzen

$$\psi D(\varphi) - \varphi\bar{D}(\psi) = \frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q$$

mit der Bedingung, dass $P$, $Q$ in $\varphi$ und $\psi$ bilineare Differentialausdrücke bedeuten. — Der betreffende Satz kann hierauf durch das obige Verfahren für Differentialausdrücke, die aus drei oder mehreren elementaren zusammengesetzt sind, bewiesen werden. Es ist auch nicht schwer zu sehen, wie der Satz allgemein zu beweisen ist. Für unseren gegenwärtigen Zweck genügt aber schon das oben dargelegte.

## § 4.

Nunmehr gehen wir zu den Anwendungen der im Vorhergehenden entwickelten Beziehungen über.

In der Formel (10) sei $\psi$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi = 0, \tag{12}$$

und man setze $\varphi = e^{ux+vy}$. Benutzt man die Formel (5) und integrirt in der $x$-Ebene längs einer Linie $(x)$, in der $y$-Ebene längs einer Linie $(y)$, so folgt

$$\sum_{h,k} f_{hk}(u\,,\,v) \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} e^{ux+vy}\phi(x\,,\,y)x^h y^k\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

*Bedeutet* $\phi(x\,,\,y)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (12) *und sind die Integrationswege* $x$ *und* $y$ *so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

*identisch erfüllt wird, so besitzen wir in*

$$\Psi(u\,,\,v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} e^{ux+vy}\phi(x\,,\,y)\,dx\,dy \tag{13}$$

*eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\sum_{h,k} f_{hk}(u\,,\,v)\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\,\partial v^k}\Psi = 0. \tag{14}$$

In jedem Gliede der obigen Bedingungsgleichung können die Integrationen wenigstens theilweise ausgeführt werden, was natürlich ein sehr wichtiger Umstand ist. Ist die Integration in Bezug auf $x$ zwischen $\alpha_1$ und $\alpha_2$, die in Bezug auf $y$ zwischen $\beta_1$ und $\beta_2$ erstreckt, so kann die genannte Gleichung folgenderweise geschrieben werden:

$$\int_{\beta_1}^{\beta_2} dy \Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} P + \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} dx \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} Q = 0.$$

Diese Gleichung ist nun sicher erfüllt, falls die beiden Grössen

$$\Big|_{\alpha_1}^{\alpha_2} P(e^{ux+vy}\,,\,\phi)\,,\quad \Big|_{\beta_1}^{\beta_2} Q(e^{ux+vy}\,,\,\phi)$$

identisch verschwinden.

Durch das bestimmte Integral (13) wird nun die Integration von (14) zurückgeführt auf die der Gleichung (12), welche deshalb ex analogia

die LAPLACE'sche *Transformirte* der partiellen Differentialgleichung (14) genannt werden kann.

Werden (12) und (14) mit einander verglichen, so findet man, dass die Gradzahl jeder dieser Gleichungen in Bezug auf die unabhängigen Veränderlichen gleich der Ordnungszahl der anderen ist. Sind beispielsweise die Coefficienten von (14) linear, so ist (12) eine Differentialgleichung erster Ordnung. Ist $k$ in allen Gliedern von (12) gleich der Null, d. h. ist (12) eine partielle Differentialgleichung, wo die Variable $y$ nicht explicite vorkommt, so ist (14) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit $v$ als Parameter. Kommt umgekehrt $v$ in (14) nicht explicite vor, so ist (12) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit $y$ als Parameter.

*Zwischen den beiden Gleichungen* (12) *und* (14) *existirt aber zugleich eine bemerkenswerthe Reciprocität, infolge deren sie sich gegenseitig durch bestimmte Integrale integriren.*

Setzen wir nämlich in der Formel

$$\Psi \sum_{h,k} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} [f_{hk}(u, v)\, \Phi] - \Phi \sum_{h,k} f_{hk}(u, v) \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} \Psi$$
$$= \frac{\partial}{\partial u} P'(\Psi, \Phi) + \frac{\partial}{\partial v} Q'(\Psi, \Phi)$$

$\Psi$ gleich einem Integral der Differentialgleichung (14) und $\Phi = e^{-ux-vy}$, so folgt durch Integration in der $u$-Ebene längs einer Linie $(u)$, in der $v$-Ebene längs einer Linie $(v)$ und mit Benutzung der Formel (6):

$$\int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} du\, dv\, \Psi \sum_{h,k} (-1)^{h+k} \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k} [f_{hk}(u, v) e^{-ux-vy}]$$
$$= \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} du\, dv\, \Psi \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^h y^k e^{-ux-vy}]$$
$$= \sum_{h,k} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)\left\{x^h y^k \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} e^{-ux-vy}\, \Psi(u, v)\, du\, dv\right\}$$
$$= \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} \left(\frac{\partial}{\partial u} P' + \frac{\partial}{\partial v} Q'\right) du\, dv.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

*Bedeutet* $\Psi(u, v)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (14) *und sind die Integrationswege* $(u)$ *und* $(v)$ *so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int_{(u)}\int_{(v)}\left(\frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q'\right)du\,dv = 0$$

*identisch erfüllt wird, so besitzen wir in*

$$\phi(x, y) = \int_{(u)}\int_{(v)} e^{-ux-vy}\,\Psi(u, v)\,du\,dv \tag{15}$$

*eine Lösung der Differentialgleichung* (12).

Der Zusammenhang zwischen den partiellen Differentialgleichungen (12) und (14) wird also durch die beiden Integralformeln (13) und (15) vermittelt.

## § 5.

In diesem Paragraphen sollen einige Sätze aus der Formel (11) abgeleitet werden.

Multiplicirt man die genannte Formel mit $x^{-1}y^{-1}$ und ersetzt $\phi$ durch $xy\phi$, so erhält man mit Benutzung von (8):

$$\phi\sum_{h,k} x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi - \varphi\sum_{h,k} F_{hk}\left(-x\frac{\partial}{\partial x} - 1, -y\frac{\partial}{\partial y} - 1\right)x^h y^k \phi$$
$$= y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q.$$

Nunmehr sei $\phi$ eine Lösung der Differentialgleichung

$$\sum_{h,k} F_{hk}\left(-x\frac{\partial}{\partial x} - 1, -y\frac{\partial}{\partial y} - 1\right)x^h y^k \phi = 0, \tag{16}$$

während $\varphi$ eine beliebige Function der Form $\chi(ux, vy)$ bedeute. Alsdann ergiebt sich durch Integration

$$\sum_{h,k}\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\phi(x,y)x^h y^k F_{hk}\left(x\frac{\partial}{\partial x}, y\frac{\partial}{\partial y}\right)\chi(ux, vy)$$

$$=\sum_{h,k}\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\phi(x,y)x^h y^k F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\chi(ux, vy)$$

$$(17)\qquad =\sum_{h,k} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\int_{(x)}\int_{(y)}\phi(x,y)\chi(ux, vy)x^h y^k\,dx\,dy$$

$$=\int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Durch passende Specialisirungen von $\chi$ können hieraus verschiedene Sätze abgeleitet werden. Setzt man z. B. $\chi(x, y) = x^\rho y^\sigma$ und benutzt die Formel (7), so hat man den Satz:

*Bedeutet $\phi(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (16) *und sind die Integrationswege* $(x)$ *und* $(y)$ *so gewählt, dass*

$$\int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

*ist, so besitzt man in*

$$(18)\qquad \Psi(\rho, \sigma) = \int_{(x)}\int_{(y)}\phi(x,y)x^\rho y^\sigma\,dx\,dy$$

*eine Lösung der Differenzen-Gleichung*

$$(19)\qquad \sum_{h,k} F_{hk}(\rho, \sigma)\Psi(\rho + h, \sigma + k) = 0.$$

Die Ermittelung von Lösungen der partiellen Differenzen-Gleichung (19) wird also durch das Integral (18) zurückgeführt auf die Integration der partiellen Differentialgleichung (16). Es giebt bekanntlich auch einen analogen, von Laplace herrührenden Satz über gewöhnliche Differential- und Differenzen-Gleichungen.

Kommt $\sigma$ in den Coefficienten von (19) nicht explicite vor, so ist (16) eine gewöhnliche Differentialgleichung mit $y$ als Parameter. Ist $k$ in allen Gliedern von (19) gleich der Null, so ist (16) eine partielle Differentialgleichung, welche durch die Substitution $y = e^{\eta}$ in eine Gleichung übergeht, wo die neue Variable $\eta$ nicht mehr explicite vorkommt.

In der Formel (17) wollen wir nunmehr $\chi(x, y) = e^{x+y}$ annehmen. Alsdann ergiebt sich der Satz:

*Bezeichnet $\psi(x, y)$ eine Lösung der Differentialgleichung* (16) *und sind die Integrationswege* $(x)$ *und* $(y)$ *so gewählt, dass*

$$\int_{(x)}\int_{(y)} \left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + y^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

*ist, so besitzt man in*

$$\Phi(u, v) = \int_{(x)}\int_{(y)} e^{ux+vy}\psi(x, y)\,dx\,dy$$

*eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\sum_{h,k} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\Phi = 0.$$

In unserer Formel (17) wollen wir schliesslich

$$\chi(x, y) = (1 - x)^{\alpha-1}(1 - y)^{\beta-1}$$

annehmen. Alsdann hat man

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\int_{(x)}\int_{(y)}(1 - ux)^{\alpha-1}(1 - vy)^{\beta-1}\psi(x, y)\,x^h y^k\,dx\,dy$$
$$= \int_{(x)}\int_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Hieraus ergiebt sich durch Rechnungen, die im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmen, welche im folgenden Paragraphen ausgeführt werden sollen, der folgende Satz:

*Bedeutet* $\psi(x, y)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (16) *und sind die Integrationswege* $(x)$ *und* $(y)$ *so gewählt, dass*

$$\int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}\left(y^{-1}\frac{\partial}{\partial x}P + x^{-1}\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

*ist, so besitzen wir in*

$$\Psi(u, v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}(1 - ux)^{\alpha-1}(1 - vy)^{\beta-1}\psi(x, y)\,dx\,dy$$

*eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} F_{hk}\left(u\frac{\partial}{\partial u}, v\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{u^{\alpha-h}v^{\beta-k}\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\partial v^{n-k}}\left[u^{m-\alpha}v^{n-\beta}\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\Psi\right]\right\} = 0.$$

## § 6.

In diesem Paragraphen sollen zweifache Integrale der folgenden Form benützt werden

(20) $$\Phi(u, v) = \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)}(u - x)^{\alpha-1}(v - y)^{\beta-1}\varphi(x, y)\,dx\,dy.$$

Setzen wir in der verallgemeinerten LAGRANGE'schen Beziehung

$$\varphi\sum_{h,k=0}^{m,n} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)x^h y^k \psi - \psi\sum_{h,k=0}^{m,n} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}P(\varphi, \psi) + \frac{\partial}{\partial y}Q(\varphi, \psi)$$

$\varphi$ gleich einer Lösung der Differentialgleichung

(21) $$\sum_{h,k=0}^{m,n} x^h y^k f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right)\varphi = 0$$

und $\psi$ gleich dem Ausdrucke $(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}$, so folgt durch Integration längs den Linien $(x)$ und $(y)$:

$$(22)\quad \sum_{h,k=0}^{m,n}\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\varphi(x,y)f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^h y^k (u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

$$=\int_{(x)}\int_{(y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P+\frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

Nun wird sich einerseits ergeben, dass eine einfache Beziehung zwischen einem Integral der Form

$$\Psi_{hk}(u,v)=\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\varphi(x,y)f\left(-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y}\right)[x^h y^k (u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

und dem specielleren Integral

$$\Psi(u,v)=\int_{(x)}\int_{(y)} dx\,dy\,\varphi(x,y)f\left(-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y}\right)[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

existirt. Da offenbar

$$f\left(-\frac{\partial}{\partial x},-\frac{\partial}{\partial y}\right)[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]=f\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}]$$

ist, so findet man andererseits, dass sich das letzte Integral durch (20) folgenderweise ausdrücken lässt

$$(23)\qquad \Psi(u,v)=f\left(\frac{\partial}{\partial u},\frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi(u,v).$$

Auf solche Weise wird sich schliesslich für $\Phi(u,v)$ eine homogene lineare Differentialgleichung ergeben, wofern die Integrationswege so gewählt sind, dass die rechte Seite von (22) identisch verschwindet.

Die erforderlichen Rechnungen sollen jetzt näher ausgeführt werden.

Aus der evidenten Formel

$$x\frac{\partial}{\partial u}(u-x)^{\alpha-1}=u\frac{\partial}{\partial u}(u-x)^{\alpha-1}-(\alpha-1)(u-x)^{\alpha-1}=\left(u\frac{\partial}{\partial u}-\alpha+1\right)(u-x)^{\alpha-1}$$

folgt durch wiederholte Differentiation und Anwendung derselben Formel

$$x^h \frac{\partial^h}{\partial u^h}(u-x)^{\alpha-1} = \left(u\frac{\partial}{\partial u} - \alpha + 1\right)\dots\left(u\frac{\partial}{\partial u} - \alpha + h\right)(u-x)^{\alpha-1}.$$

Auf Grund einer bekannten Formel [1] kann diese Beziehung folgenderweise geschrieben werden:

$$(24) \qquad x^h \frac{\partial^h}{\partial u^h}(u-x)^{\alpha-1} = u^\alpha \frac{\partial^h}{\partial u^h}[u^{h-\alpha}(u-x)^{\alpha-1}].$$

Man hat somit auch

$$x^h y^k \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}[(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}] = u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}(u-x)^{\alpha-1}(v-y)^{\beta-1}].$$

Den beiden Seiten dieser Formel fügen wir jetzt den Ausdruck $f\left(-\frac{\partial}{\partial x}, -\frac{\partial}{\partial y}\right)$ symbolisch als Factor hinzu und multipliciren nachher mit $\varphi(x, y)$. Dann ergiebt sich durch Integration längs den Linien $(x)$ und $(y)$ und mit Benutzung der obigen Bezeichnung:

$$(25) \qquad \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\Psi_{hk} = u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}\Psi].$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten von (2) die Ableitung

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial v^n} = \frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\partial v^{n-k}} \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}$$

und benutzt die Formeln (23) und (25), so folgt

$$\sum_{h,k=0}^{m,n} \frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\partial v^{n-k}}\left\{u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\left[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi\right]\right\}$$
$$= \frac{\partial^{m+n}}{\partial u^m \partial v^n}\int\limits_{(x)}^{*}\int\limits_{(y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy.$$

---

[1] Aus der bekannten Formel $x^n \frac{d^n\varphi}{dx^n} = x\frac{d}{dx}\left(x\frac{d}{dx} - 1\right)\dots\left(x\frac{d}{dx} - n + 1\right)\varphi$ folgt, wenn man $\varphi$ durch $x^{n-\alpha}\varphi$ ersetzt und die Formel (8) benutzt:

$$\left(x\frac{d}{dx} - \alpha + 1\right)\dots\left(x\frac{d}{dx} - \alpha + n\right)\varphi = x^\alpha \frac{d^n}{dx^n}[x^{n-\alpha}\varphi].$$

Diese Gleichung giebt uns schliesslich den Satz:

*Bedeutet* $\varphi(x, y)$ *eine Lösung der Differentialgleichung* (21) *und sind die Integrationswege* $(x)$ *und* $(y)$ *so gewählt, dass*

$$\int_{(x)}\int_{(y)}\left(\frac{\partial}{\partial x}P + \frac{\partial}{\partial y}Q\right)dx\,dy = 0$$

*ist, so besitzen wir in*

$$\Phi(u, v) = \int_{(x)}\int_{(y)}(u - x)^{\alpha-1}(v - y)^{\beta-1}\varphi(x, y)\,dx\,dy \tag{26}$$

*eine Lösung der Differentialgleichung*

$$\sum_{h,k=0}^{m,n}\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\left\{u^\alpha v^\beta \frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h \partial v^k}\left[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi\right]\right\} = 0. \tag{27}$$

Durch diesen Satz wird die Ermittelung von Lösungen der Differentialgleichung (27) zurückgeführt auf die Integration der Gleichung (21). Überdies lässt sich aber zeigen, dass die Beziehung zwischen den beiden Gleichungen eine solche gegenseitige ist, *dass auch die Integration der ersteren* (21) *durch Quadraturen auf die der letzteren* (27) *zurückführbar ist.*

Da offenbar der adjungirte Differentialausdruck einer Summe gleich der Summe von den adjungirten der Summanden ist, so ergiebt sich mit Hülfe des am Schlusse des § 3. bewiesenen Reciprocitätssatzes:

$$\begin{aligned}\Phi\sum_{h,k=0}^{m,n} f_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial u}, -\frac{\partial}{\partial v}\right)\left\{u^{h-\alpha}v^{k-\beta}\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\partial v^k}\left[u^\alpha v^\beta\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\Psi\right]\right\}\\ = (-1)^{m+n}\Psi\sum_{h,k=0}^{m,n}\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\,\partial v^{n-k}}\left\{u^\alpha v^\beta\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\partial v^k}\left[u^{h-\alpha}v^{k-\beta}f_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}\right)\Phi\right]\right\}\\ + \frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q',\end{aligned} \tag{28}$$

wo $P'$, $Q'$ in $\Phi$ und $\Psi$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Hier

ersetze man nun $\Phi$ durch eine Lösung der Differentialgleichung (27) sowie $\Psi$ durch den Ausdruck

$$(29) \qquad \Psi = (u-x)^{m-\alpha-1}(v-y)^{n-\beta-1}.$$

Alsdann verschwindet die auf der rechten Seite befindliche Summe, während die links auf $\Psi$ sich beziehenden Operationen eine sehr einfache Form annehmen werden.

Ersetzt man nämlich in der Formel (24) $\alpha$ durch $h-\alpha$, so folgt

$$u^{h-\alpha}\frac{\partial^h}{\partial u^h}[u^\alpha(u-x)^{h-\alpha-1}] = (-1)^h\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-h+1)x^h(u-x)^{-\alpha-1}.$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich, dass ein Ausdruck der Form

$$u^{h-\alpha}v^{k-\beta}\frac{\partial^{h+k}}{\partial u^h\partial v^k}\left[u^\alpha v^\beta\frac{\partial^{m-h+n-k}}{\partial u^{m-h}\partial v^{n-k}}\Psi\right]$$

bei der Annahme (29) in den folgenden übergeht

$$(-1)^{m+n}\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-m+1)\beta(\beta-1)\dots(\beta-n+1)x^hy^k(u-x)^{-\alpha-1}(v-y)^{-\beta-1}.$$

Ersetzt man also in (28) $\Phi$ durch eine Lösung der Differentialgleichung (27) und $\Psi$ durch den Ausdruck (29), so folgt, wenn man die Constante $(-1)^{m+n}\alpha\dots(\alpha-m+1)\beta\dots(\beta-n+1)$ durch $C$ bezeichnet:

$$C\Phi(u,v)\sum_{h,k=0}^{m,n}x^hy^kf_{hk}\left(-\frac{\partial}{\partial u},-\frac{\partial}{\partial v}\right)[(u-x)^{-\alpha-1}(v-y)^{-\beta-1}]$$

$$= C\Phi(u,v)\sum_{h,k=0}^{m,n}x^hy^kf_{hk}\left(\frac{\partial}{\partial x},\frac{\partial}{\partial y}\right)[(u-x)^{-\alpha-1}(v-y)^{-\beta-1}] = \frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q'.$$

Integrirt man nun schliesslich in der $u$-Ebene längs einer Linie $(u)$ in der $v$-Ebene längs einer Linie $(v)$, so hat man den Satz:

*Bedeutet $\Phi(u,v)$ eine Lösung der Differentialgleichung (27) und sind die Integrationswege $(u)$ und $(v)$ so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int_{(u)}\int_{(v)}\left(\frac{\partial}{\partial u}P' + \frac{\partial}{\partial v}Q'\right)du\,dv = 0$$

*identisch erfüllt wird, so besitzen wir in*

$$\varphi(x\,,y) = \int\limits_{(u)}\int\limits_{(v)} (u-x)^{-\alpha-1}(v-y)^{-\beta-1}\,\Phi(u\,,v)\,du\,dv \tag{30}$$

*eine Lösung der Differentialgleichung* (21).

Der Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (21) und (27) wird also durch die beiden Integralformeln (26) und (30) vermittelt.

## § 7.

Sehen wir von dem Integral (18) ab, so sind die übrigen in der vorliegenden Arbeit angewandten Integrale in den allgemeinen Formen

$$\text{(A)}\quad \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \psi(ux\,,vy)\varphi(x\,,y)\,dx\,dy \quad \text{und} \quad \text{(B)}\quad \int\limits_{(x)}\int\limits_{(y)} \psi(u-x\,,v-y)\varphi(x\,,y)\,dx\,dy$$

enthalten, wo wir $\varphi$ und $\psi$ als Lösungen von linearen Differentialgleichungen denken wollen. Die Ausdrücke

$$e^{x+y}\,,\ x^{\alpha-1}y^{\beta-1}\,,\ (1-x)^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}$$

— mit denen $\psi$ zu identificiren ist, damit diese Integrale in die von uns erörterten übergehen — können als Lösungen der einfachsten linearen Differentialgleichungen bezeichnet werden. Zwei allgemeine Fragen treten hier nun ungezwungen hervor:

Vorausgesetzt, dass $\varphi$ und $\psi$ beide als Lösungen von gegebenen linearen Differentialgleichung definirt sind, lässt sich dann auch eine lineare Differentialgleichung angeben, die von dem betreffenden Integrale (A) oder (B) bei passender Wahl der Integrationswege $(x)$ und $(y)$ befriedigt wird?

Vorausgesetzt, dass die eine von den Functionen $\varphi$ und $\psi$ als Lösung einer gewissen linearen Differentialgleichung fixirt ist, lässt sich dann die andere als Lösung einer solchen Gleichung bestimmen, dass das betreffende Integral (A) oder (B) bei passender Wahl der Integrationswege einer vorgelegten linearen Differentialgleichung Genüge leistet?

Was nun speciell die erstere dieser Fragen betrifft, so lässt sie sich, wenn die eine von den Functionen $\varphi\,,\psi$ passend beschränkt wird, verhältniss-

mässig einfach und übersichtlich beantworten. Verfasser erlaubt sich hier die Hauptergebnisse mitzutheilen, zu denen er in seiner Arbeit *Über gewisse durch bestimmte Integrale vermittelte Beziehungen zwischen linearen Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten*[1] für den Fall gekommen ist, dass $\varphi$ und $\psi$ gewöhnliche lineare Differentialgleichungen befriedigen.

Alsdann gelten folgende Sätze:

*Bezeichnen $\psi$ und $\varphi$ Lösungen von den resp. Differentialgleichungen*

$$f\left(x\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = xg\left(x\frac{d}{dx}\right)\psi(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} F_{\nu}\left(x\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = 0,$$

*und ist der Integrationsweg $(x)$ so gewählt, dass eine gewisse Bedingungsgleichung erfüllt wird, so befriedigt das Integral*

$$y = \int_{(x)} \psi\left(\frac{u}{x}\right)\varphi(x)\frac{dx}{x}$$

*die Differentialgleichung*

$$\left.\begin{array}{l}
F_0\left(u\frac{d}{du}\right) f\left(u\frac{d}{du}\right) f\left(u\frac{d}{du}-1\right) f\left(u\frac{d}{du}-2\right)\dots f\left(u\frac{d}{du}-n+1\right)y \\
+ \; uF_1\left(u\frac{d}{du}\right) g\left(u\frac{d}{du}\right) f\left(u\frac{d}{du}\right) f\left(u\frac{d}{du}-1\right) \quad \dots f\left(u\frac{d}{du}-n+2\right)y \\
+ \; u^2F_2\left(u\frac{d}{du}\right) g\left(u\frac{d}{du}\right) g\left(u\frac{d}{du}+1\right) f\left(u\frac{d}{du}\right) \quad \dots f\left(u\frac{d}{du}-u+3\right)y \\
+ \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \\
+ \; u^nF_n\left(u\frac{d}{du}\right) g\left(u\frac{d}{du}\right) g\left(u\frac{d}{du}+1\right) g\left(u\frac{d}{du}+2\right)\dots g\left(u\frac{d}{du}+n-1\right)y
\end{array}\right\} = 0.$$

Diese Gleichung ist nun sehr übersichtlich aus den Ausdrücken zusammengesetzt, welche in den Differentialgleichungen der Functionen $\varphi$ und $\psi$ vorkommen.

Ein besonders bemerkenswerther specieller Fall tritt ein, wenn $n = 1$ ist, d. h. wenn nicht nur die Differentialgleichung von $\psi$ sondern auch die von $\varphi$ eine *hypergeometrische* ist.

---

[1] Acta Soc. Scient. Fenn., Tom. 21.

In dem folgenden Satze haben wir zur Abkürzung $f$ und $g$ an Stelle von $f\left(\frac{d}{du}\right)$ und $g\left(\frac{d}{du}\right)$ geschrieben. Ferner bedeutet $g^n$ die symbolische $n^{te}$ Potenz von $g$, während $g'$ die erste Ableitung von $g$ bezeichnet.

*Bezeichnen $\psi$ und $\varphi$ Lösungen von den resp. Differentialgleichungen*

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x) = xg\left(\frac{d}{dx}\right)\psi(x),$$

$$\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi(x) = 0,$$

*und ist der Integrationsweg $(x)$ so gewählt, dass eine gewisse Bedingungsgleichung erfüllt wird, so befriedigt das Integral*

$$y = \int_{(x)} \psi(u - x)\varphi(x)\,dx$$

*die Differentialgleichung*

$$0 = \begin{cases} \quad g^n f_0 y \\ + g^{n-1}[xg - f]f_1 y \\ + g^{n-2}[xg + g' - f][xg - f]f_2 y \\ + \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \\ + [xg + (n-1)g' - f][xg + (n-2)g' - f]\ldots[xg - f]f_n y. \end{cases}$$

Ein besonders einfacher und bemerkenswerther Fall tritt auch hier ein, wenn $n = 1$ ist, d. h. wenn nicht nur die Differentialgleichung von $\psi$ sondern auch die von $\varphi$ eine LAPLACE'sche Gleichung ist.

Helsingfors, April 1896.

# ÜBER DIE INTEGRATION SIMULTANER LINEARER DIFFERENTIALGLEICHUNGEN DURCH BESTIMMTE INTEGRALE

VON

HJ. MELLIN
in HELSINGFORS.

In diesem Aufsatze wollen wir zeigen, dass die auf Verwendung bestimmter Integrale basirte Integrationsmethode ebenfalls auf *Systeme* simultaner linearer Differentialgleichungen übertragen werden kann. Der Kürze halber beschränken wir uns hierbei auf Systeme von zwei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen zwischen zwei abhängigen Veränderlichen. Aus der folgenden Darstellung wird sich aber leicht ergeben, dass unsere Sätze ohne weiteres auf beliebige Systeme gewöhnlicher linearer homogener Differentialgleichungen mit rationalen Coefficienten ausgedehnt werden können. An der Hand der vorangehenden Arbeit[1] kann man ferner finden, dass ganz analoge Sätze auch von Systemen partieller linearer Differentialgleichungen gelten müssen.

## § 1.

In den LAGRANGE'schen Beziehungen

$$\varphi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi = \frac{d}{dx}f(\chi, \varphi),$$

$$\psi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\psi = \frac{d}{dx}g(\chi, \psi),$$

[1] *Über die Integration partieller linearer Differentialgleichungen durch vielfache Integrale.*

wo $f(\chi, \varphi)$ und $g(\chi, \psi)$ in $\chi$ und $\varphi$, resp. in $\chi$ und $\psi$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, wollen wir $\chi = e^{ux}$ annehmen, während $\varphi$ und $\psi$ zwei zusammengehörende Lösungen der Differentialgleichung

$$(1) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu \varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu \psi = 0$$

bedeuten sollen. Beachtet man zugleich die bekannte Formel

$$f\left(\frac{d}{dx}\right)e^{ux} = f(u)e^{ux},$$

so folgt aus den obigen Beziehungen durch Addition und Integration in der $x$-Ebene längs einer Linie $(x)$:

$$\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u)\int_{(x)} e^{ux}x^\nu \varphi\, dx + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u)\int_{(x)} e^{ux}x^\nu \psi\, dx$$
$$= \int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\, dx.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

*Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung (1) und ist der Integrationsweg $(x)$ so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\, dx = 0$$

*identisch erfüllt wird, so besitzen wir in*

$$(2) \qquad \Phi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\varphi(x)\, dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\psi(x)\, dx$$

*ein System von Lösungen der Differentialgleichung*

$$(3) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0.$$

Zwischen den beiden Gleichungen (1) und (3) existirt zugleich eine solche Reciprocität, dass sie sich gegenseitig durch bestimmte Integrale integriren.

Um dies zu zeigen setzen wir in den LAGRANGE'schen Beziehungen

$$\Phi\sum_{\nu=0}^{m}(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}[f_{\nu}(u)\chi]-\chi\sum_{\nu=0}^{m}f_{\nu}(u)\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}\Phi=\frac{d}{du}f'(\chi,\Phi),$$

$$\Psi\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{\nu}\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}[g_{\nu}(u)\chi]-\chi\sum_{\nu=0}^{n}g_{\nu}(u)\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}\Psi=\frac{d}{du}g'(\chi,\Psi),$$

wo $f'(\chi,\Phi)$ und $g'(\chi,\Psi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, $\chi=e^{-ux}$, während $\Phi$ und $\Psi$ Lösungen der Differentialgleichung (3) bedeuten. Beachtet man zugleich, dass

$$\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}[f(u)e^{-ux}]=\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}\left[f\left(-\frac{d}{dx}\right)e^{-ux}\right]=f\left(-\frac{d}{dx}\right)\left[\frac{d^{\nu}}{du^{\nu}}e^{-ux}\right]$$
$$=(-1)^{\nu}f\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^{\nu}e^{-ux}],$$

so ergiebt sich aus den obigen Beziehungen durch Addition und Integration in der $u$-Ebene längs einer Linie $(u)$:

$$\sum_{\nu=0}^{m}f_{\nu}\left(-\frac{d}{dx}\right)x^{\nu}\int_{(u)}e^{-ux}\Phi\,du+\sum_{\nu=0}^{n}g_{\nu}\left(-\frac{d}{dx}\right)x^{\nu}\int_{(u)}e^{-ux}\Psi\,du$$
$$=\int_{(u)}\frac{d}{du}[f'(e^{-ux},\Phi)+g'(e^{-ux},\Psi)]\,du.$$

Hieraus ergiebt sich der Satz:

*Bilden $\Phi(u)$ und $\Psi(u)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung* (3) *und ist der Integrationsweg* $(u)$ *so gewählt, dass die Bedingung*

$$\int_{(u)}\frac{d}{du}[f'(e^{-ux},\Phi)+g'(e^{-ux},\Psi)]\,du=0$$

*identisch erfüllt wird, so besitzen wir in*

(4) $$\varphi(x)=\int_{(u)}e^{-ux}\Phi(u)\,du,\qquad\psi(x)=\int_{(u)}e^{-ux}\Psi(u)\,du$$

*ein System von Lösungen der Differentialgleichung* (1).

Der Zusammenhang zwischen den Differentialgleichungen (1) und (3) wird also durch die Integralformeln (2) und (4) vermittelt.

An Stelle *einer* Gleichung wollen wir jetzt *zwei* Differentialgleichungen zwischen den abhängigen Veränderlichen betrachten. Versteht man unter $F(\chi, \varphi)$, $G(\chi, \psi)$, $F'(\chi, \Phi)$, $G'(\chi, \Psi)$ bilineare Differentialausdrücke, welche in Rücksicht auf die unten noch hinzukommenden Differentialgleichungen genau ebenso zu definiren sind, wie oben $f(\chi, \varphi)$, $g(\chi, \psi)$, $f'(\chi, \Phi)$, $g'(\chi, \Psi)$ in Bezug auf die Gleichungen (1) und (3), so hat man ohne weiteres die folgenden Sätze:

*Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$(5)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\psi = 0 \end{cases}$$

*und ist der Integrationsweg $(x)$ so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]\,dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(e^{ux}, \varphi) + G(e^{ux}, \psi)]\,dx = 0$$

*erfüllt werden, so besitzen wir in*

$$\Phi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\varphi(x)\,dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\psi(x)\,dx$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$(6)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu(u)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0. \end{cases}$$

*Bilden umgekehrt* $\Phi(u)$ *und* $\Psi(u)$ *ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (6) *und ist der Integrationsweg* $(u)$ *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[f'(e^{-ux}, \Phi) + g'(e^{-ux}, \Psi)]du = 0,$$

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[F'(e^{-ux}, \Phi) + G'(e^{-ux}, \Psi)]du = 0$$

*erfüllt werden, so besitzt man in*

$$\varphi(x) = \int_{(u)} e^{-ux}\,\Phi(u)du, \qquad \psi(x) = \int_{(u)} e^{-ux}\,\Psi(u)du$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (5).

Die beiden Systeme (5) und (6) integriren sich also gegenseitig durch Quadraturen.

## § 2.

Wir benutzen jetzt LAGRANGE'sche Beziehungen der Form

$$\varphi \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu\varphi = \frac{d}{dx}f(\chi, \varphi),$$

$$\psi \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(x\frac{d}{dx}\right)\chi - \chi\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu\psi = \frac{d}{dx}g(\chi, \psi),$$

wo $f(\chi, \varphi)$ und $g(\chi, \psi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen.

Wir denken uns $\chi$ als eine beliebige Function der Form $\chi = \chi(ux)$, in welchem Falle allgemein $f\left(x\frac{d}{dx}\right)\chi(ux) = f\left(u\frac{d}{du}\right)\chi(ux)$ ist, und wählen die Functionen $\varphi$ und $\psi$ als Lösungen der Differentialgleichung

(7) $$\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-x\frac{d}{dx} - 1\right)x^\nu\psi = 0.$$

Dann ergiebt sich aus den obigen Beziehungen durch Addition und Integration längs einer Linie $(x)$:

$$(8) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\varphi\,dx + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\psi\,dx$$

$$= \int_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\chi,\varphi)+g(\chi,\psi)]\,dx.$$

Wählt man die Functionen $\varphi$ und $\psi$ so, dass sie, ausser der Gleichung (7), noch der folgenden genügen

$$(9) \qquad \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\psi = 0,$$

so besteht gleichzeitig mit (8) die Beziehung

$$(10) \qquad \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\varphi\,dx + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\int_{(x)}\chi(ux)x^\nu\psi\,dx$$

$$= \int_{(x)}\frac{d}{dx}[F(\chi,\varphi)+G(\chi,\psi)]\,dx,$$

wo $F(\chi,\varphi)$ und $G(\chi,\psi)$ in Bezug auf (9) ebenso zu definirende bilineare Differentialausdrücke bedeuten, wie $f(\chi,\varphi)$ und $g(\chi,\psi)$ hinsichtlich der Gleichung (7).

Durch passende Specialisirungen von $\chi$ können aus den simultanen Gleichungen (8) und (10) verschiedene Sätze abgeleitet werden. Setzt man beispielsweise $\chi(x)=x^\rho$ und benutzt die bekannte Formel

$$f\left(u\frac{d}{du}\right)u^\rho = u^\rho f(\rho),$$

so hat man den Satz:

*Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$(11) \qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(-x\frac{d}{dx}-1\right)x^\nu\psi = 0, \end{cases}$$

*und ist der Integrationsweg* $(x)$ *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(u^\rho x^\rho, \varphi) + g(u^\rho x^\rho, \psi)]dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(u^\rho x^\rho, \varphi) + G(u^\rho x^\rho, \psi)]dx = 0$$

*erfüllt werden, so besitzen wir in*

$$\Phi(\rho) = \int_{(x)} \varphi(x)x^\rho dx, \qquad \Psi(\rho) = \int_{(x)} \psi(x)x^\rho dx$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differenzen-Gleichungen*

$$\begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu(\rho)\Phi(\rho+\nu) + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu(\rho)\Psi(\rho+\nu) = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu(\rho)\Phi(\rho+\nu) + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu(\rho)\Psi(\rho+\nu) = 0. \end{cases}$$

In den Formeln (8) und (10) wollen wir zweitens $\chi(x) = e^x$ annehmen. Alsdann ergiebt sich der Satz:

*Bilden* $\varphi(x)$ *und* $\psi(x)$ *ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (11) *und ist der Integrationsweg* $(x)$ *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(e^{ux}, \varphi) + g(e^{ux}, \psi)]dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(e^{ux}, \varphi) + G(e^{ux}, \psi)]dx = 0$$

*erfüllt werden, so besitzen wir in*

$$\Phi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\varphi(x)dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} e^{ux}\psi(x)dx$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0. \end{cases}$$

In den Formeln (8) und (10) wollen wir schliesslich $\chi(x) = (1 - x)^{a-1}$ annehmen. Durch Rechnungen, die im Wesentlichen mit denjenigen übereinstimmen, welche im folgenden Paragraphen näher ausgeführt werden, ergiebt sich alsdann der folgende Satz, wo $p$ die kleinste, die beiden Bedingungen $p \geqq m$, $p \geqq n$ erfüllende ganze Zahl bezeichnet, während $q$ dieselbe Bedeutung hinsichtlich der Zahlen $m'$ und $n'$ hat:

*Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (11) *und ist der Integrationsweg* $(x)$ *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}\left[f((1-ux)^{a-1}, \varphi) + g((1-ux)^{a-1}, \psi)\right]dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}\left[F((1-ux)^{a-1}, \varphi) + G((1-ux)^{a-1}, \psi)\right]dx = 0$$

*erfüllt werden, so besitzen wir in*

$$\Phi(u) = \int_{(x)} (1-ux)^{a-1}\varphi(x)dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} (1-ux)^{a-1}\psi(x)dx$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$\begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{a-\nu}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^{p-a}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{a-\nu}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^{p-a}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} F_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{a-\nu}\frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}}u^{q-a}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Phi + \sum_{\nu=0}^{n'} G_\nu\left(u\frac{d}{du}\right)u^{a-\nu}\frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}}u^{q-a}\frac{d^\nu}{du^\nu}\Psi = 0. \end{cases}$$

§ 3.

In den LAGRANGE'schen Beziehungen

$$\chi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi - \varphi\sum_{\nu=0}^{m} f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\chi = \frac{d}{dx}f(\varphi,\chi),$$

$$\chi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\psi - \psi\sum_{\nu=0}^{n} g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)x^\nu\chi = \frac{d}{dx}g(\psi,\chi),$$

wo $f(\varphi,\chi)$ und $g(\psi,\chi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen, wollen wir $\chi = (u-x)^{a-1}$ annehmen, während $\varphi$ und $\psi$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung

$$(12) \qquad \sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = 0$$

bilden. Aus den obigen Beziehungen folgt dann durch Addition und Integration

$$(13) \quad \sum_{\nu=0}^{m}\int_{(x)} dx\,\varphi f_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^\nu(u-x)^{a-1}] + \sum_{\nu=0}^{n}\int_{(x)} dx\,\psi g_\nu\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^\nu(u-x)^{a-1}]$$

$$= -\int_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\varphi,(u-x)^{a-1}) + g(\psi,(u-x)^{a-1})]dx.$$

Fügt man den beiden Seiten der in § 6. der vorangehenden Arbeit abgeleiteten Formel

$$(14) \qquad x^\nu\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}(u-x)^{a-1} = u^a\frac{\partial^\nu}{\partial u^\nu}[u^{\nu-a}(u-x)^{a-1}]$$

den Ausdruck $f\left(-\frac{d}{dx}\right)$ symbolisch als Factor hinzu und multiplicirt nachher mit $\varphi(x)$, so ergiebt sich durch Integration

$$\frac{d^\nu}{du^\nu}\int\limits_{(x)} dx\,\varphi f\left(-\frac{d}{dx}\right)[x^\nu(u-x)^{a-1}] = u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}\int\limits_{(x)} dx\,\varphi f\left(-\frac{d}{dx}\right)(u-x)^{a-1}$$

$$= u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}\int\limits_{(x)} dx\,\varphi f\left(\frac{d}{du}\right)(u-x)^{a-1} = u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}f\left(\frac{d}{du}\right)\int\limits_{(x)}(u-x)^{a-1}\varphi(x)dx.$$

Nimmt man nun auf beiden Seiten von (13) die $p^{\text{te}}$ Ableitung — unter $p$ die kleinste, die beiden Bedingung $p \geqq m$, $p \geqq n$ erfüllende ganze Zahl verstehend — so erhält man mit Benutzung der letzten Formel

$$\sum_{\nu=0}^{m}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\int\limits_{(x)}(u-x)^{a-1}\varphi(x)dx$$

$$+\sum_{\nu=0}^{n}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}g_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\int\limits_{(x)}(u-x)^{a-1}\psi(x)dx$$

$$= -\frac{d^p}{du^p}\int\limits_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\varphi, (u-x)^{a-1}) + g(\psi, (u-x)^{a-1})]dx.$$

Hieraus ergiebt sich schliesslich der Satz:

*Bilden $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ ein System von Lösungen der Differentialgleichung (12) und ist der Integrationsweg $(x)$ so gewählt, dass*

$$\int\limits_{(x)}\frac{d}{dx}[f(\varphi, (u-x)^{a-1}) + g(\psi, (u-x)^{a-1})]dx = 0$$

*ist, so besitzen wir in*

$$\Phi(u) = \int\limits_{(x)}(u-x)^{a-1}\varphi(x)dx, \qquad \Psi(u) = \int\limits_{(x)}(u-x)^{a-1}\psi(x)dx$$

*ein System von Lösungen der Differentialgleichung*

$$(15)\quad \sum_{\nu=0}^{m}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Phi + \sum_{\nu=0}^{n}\frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}}u^a\frac{d^\nu}{du^\nu}u^{\nu-a}g_\nu\left(\frac{d}{du}\right)\Psi = 0.$$

Wir werden zeigen, dass auch umgekehrt die Integration von (12) durch Quadraturen auf die der Gleichung (15) zurückführbar ist.

Da der adjungirte Differentialausdruck einer Summe gleich ist der Summe von den adjungirten der Summanden, so ergeben sich, wenn man auch den Reciprocitätssatz benutzt, die Beziehungen

$$\chi \sum_{\nu=0}^{m} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} u^{\alpha} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\nu-\alpha} f_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right) \Phi$$

$$= (-1)^{p} \Phi \sum_{\nu=0}^{m} f_{\nu}\left(-\frac{d}{du}\right) u^{\nu-\alpha} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\alpha} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} \chi + \frac{d}{du} f'(\Phi, \chi),$$

$$\chi \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} u^{\alpha} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\nu-\alpha} g_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right) \Psi$$

$$= (-1)^{p} \Psi \sum_{\nu=0}^{n} g_{\nu}\left(-\frac{d}{du}\right) u^{\nu-\alpha} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\alpha} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} \chi + \frac{d}{du} g'(\Psi, \chi),$$

wo $f'(\Phi, \chi)$ und $g'(\Psi, \chi)$ bilineare Differentialausdrücke bezeichnen. Wir wählen nun $\Phi$ und $\Psi$ als Lösungen der Differentialgleichung (15) und ersetzen $\chi$ durch den Ausdruck

$$\chi = (u - x)^{p-\alpha-1}. \tag{16}$$

Alsdann verschwindet die linke Seite der durch Addition der obigen Beziehungen entstehenden Gleichung, während die unter den Summationszeichen auf $\chi$ sich beziehenden Operationen eine sehr einfache Form annehmen werden.

Ersetzt man nämlich in der Formel (14) $\alpha$ durch $\nu - \alpha$, so folgt

$$u^{\nu-\alpha} \frac{\partial^{\nu}}{\partial u^{\nu}} [u^{\alpha} (u - x)^{\nu-\alpha-1}] = (-1)^{\nu} \alpha (\alpha - 1) \ldots (\alpha - \nu + 1) x^{\nu} (u - x)^{-\alpha-1}.$$

Mit Benutzung dieser Formel ergiebt sich leicht, dass ein Ausdruck der Form

$$u^{\nu-\alpha} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\alpha} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} \chi$$

bei der Annahme (16) in den folgenden übergeht

$$(-1)^{p} \alpha (\alpha - 1) \ldots (\alpha - p + 1) x^{\nu} (u - x)^{-\alpha-1}.$$

Wählt man also in den obigen LAGRANGE'schen Beziehungen $\Phi$ und $\Psi$ als Lösungen der Differentialgleichung (15) und ersetzt $\chi$ durch den Ausdruck (16), so folgt durch Addition

$$C\Phi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(-\frac{d}{du}\right)(u-x)^{-a-1} + C\Psi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(-\frac{d}{du}\right)(u-x)^{-a-1}$$

$$= C\Phi\sum_{\nu=0}^{m} x^\nu f_\nu\left(\frac{d}{du}\right)(u-x)^{-a-1} + C\Psi\sum_{\nu=0}^{n} x^\nu g_\nu\left(\frac{d}{dx}\right)(u-x)^{-a-1}$$

$$= \frac{d}{du}[f'(\Phi,(u-x)^{p-a-1}) + g'(\Psi,(u-x)^{p-a-1})],$$

wo zur Abkürzung $a(a-1)\ldots(a-p+1)=C$ gesetzt wurde.

Integrirt man nun schliesslich in der $u$-Ebene längs einer passenden Linie $(u)$, so hat man den Satz:

*Bilden* $\Phi(u)$ *und* $\Psi(u)$ *ein System von Lösungen der Differentialgleichung* (15) *und ist der Integrationsweg so gewählt, dass*

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[f'(\Phi,(u-x)^{p-a-1}) + g'(\Psi,(u-x)^{p-a-1})]du = 0$$

*ist, so besitzen wir in*

$$\varphi(x) = \int_{(u)}(u-x)^{-a-1}\Phi(u)du, \qquad \psi(x) = \int_{(u)}(u-x)^{-a-1}\Psi(u)du$$

*ein System von Lösungen der Differentialgleichung* (12).

An Stelle *einer* Gleichung betrachten wir jetzt *zwei* Differentialgleichungen zwischen den abhängigen Veränderlichen und verstehen unter $F(\varphi,\chi)$, $G(\psi,\chi)$, $F'(\Phi,\chi)$, $G'(\Psi,\chi)$ bilineare Differentialausdrücke, welche in Bezug auf die unten hinzu kommenden Differentialgleichungen ebenso zu definiren sind, wie oben $f(\varphi,\chi)$, $g(\psi,\chi)$, $f'(\Phi,\chi)$, $g'(\Psi,\chi)$ hinsichtlich der Gleichungen (12) und (15). Wie oben bezeichnet $p$ die kleinste, die beiden Bedingungen $p \geqq m$, $p \geqq n$ erfüllende ganze Zahl, während $q$ dieselbe Bedeutung hinsichtlich der Zahlen $m'$ und $n'$ hat. Aus dem Vorangehenden ergeben sich dann ohne weiteres die nachstehenden Sätze:

*Bilden* $\varphi(x)$ *und* $\psi(x)$ *ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$(17)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} x^{\nu} f_{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi + \sum_{\nu=0}^{n} x^{\nu} g_{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} x^{\nu} F_{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right)\varphi + \sum_{\nu=0}^{n'} x^{\nu} G_{\nu}\left(\frac{d}{dx}\right)\psi = 0, \end{cases}$$

*und ist der Integrationsweg so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[f(\varphi, (u-x)^{a-1}) + g(\psi, (u-x)^{a-1})]dx = 0,$$

$$\int_{(x)} \frac{d}{dx}[F(\varphi, (u-x)^{a-1}) + G(\psi, (u-x)^{a-1})]dx = 0$$

*erfüllt werden, so besitzen wir in*

$$\Phi(u) = \int_{(x)} (u-x)^{a-1}\varphi(x)dx, \qquad \Psi(u) = \int_{(x)} (u-x)^{a-1}\psi(x)dx$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen*

$$(18)\qquad \begin{cases} \sum_{\nu=0}^{m} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} u^{a} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\nu-a} f_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right)\Phi + \sum_{\nu=0}^{n} \frac{d^{p-\nu}}{du^{p-\nu}} u^{a} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\nu-a} g_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right)\Psi = 0, \\ \sum_{\nu=0}^{m'} \frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}} u^{a} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\nu-a} F_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right)\Phi + \sum_{\nu=0}^{n'} \frac{d^{q-\nu}}{du^{q-\nu}} u^{a} \frac{d^{\nu}}{du^{\nu}} u^{\nu-a} G_{\nu}\left(\frac{d}{du}\right)\Psi = 0. \end{cases}$$

*Bilden umgekehrt* $\Phi(u)$ *und* $\Psi(u)$ *ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (18) *und ist der Integrationsweg* $(u)$ *so gewählt, dass die Bedingungen*

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[f'(\Phi, (u-x)^{p-a-1}) + g'(\Psi, (u-x)^{p-a-1})]du = 0,$$

$$\int_{(u)} \frac{d}{du}[F'(\Phi, (u-x)^{q-a-1}) + G'(\Psi, (u-x)^{q-a-1})]du = 0$$

*erfüllt werden, so besitzen wir in*

$$\varphi(x) = \int_{(u)} (u - x)^{-a-1} \Phi(u)\, du, \qquad \psi(x) = \int_{(u)} (u - x)^{-a-1} \Psi(u)\, du$$

*ein System von Lösungen der simultanen Differentialgleichungen* (17).

Helsingfors, Mai 1896.

# THÉORÈME SUR LES SÉRIES ENTIÈRES

PAR

JACQUES HADAMARD
à BORDEAUX.

1. Soient deux séries de Maclaurin

(1) $$f(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_m z^m + \ldots$$

(2) $$\varphi(t) = b_0 + b_1 t + \ldots + b_m t^m + \ldots,$$

convergentes dans des cercles ayant pour centre l'origine et pour rayons respectifs $k$ et $l$.

La série

(3) $$\psi(x) = a_0 b_0 + a_1 b_1 x + \ldots + a_m b_m x^m + \ldots$$

dont chaque coefficient est égal au produit des coefficients correspondants des séries (1) et (2), a son rayon de convergence au moins égal à $kl$. Nous allons démontrer, plus généralement, que *la fonction* $\psi(x)$ *n'a* (et cela *dans tout le plan*) *d'autres points singuliers que ceux que l'on obtient en multipliant les affixes des différents points singuliers de* $f(z)$ *par celles des différents points singuliers de* $\varphi(t)$.

2. Une expression analytique bien connue de $\psi(x)$ est la suivante

(4) $$\psi(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(ze^{i\theta})\varphi(te^{-i\theta})\,d\theta,$$

$z$ et $t$ étant deux nombres fixes quelconques de modules respectivement inférieurs à $k$ et $l$ et satisfaisant à la relation

(5) $$zt = x.$$

A l'intégrale (4), nous allons en substituer une autre donnant aussi la valeur de $\psi(x)$ et comprenant la première comme cas particulier.

Pour cela, $x$ ayant une valeur déterminée quelconque, nous ferons encore correspondre à chaque valeur de $z$ une valeur de $t$ par l'équation (5); mais, au lieu de laisser $z$ fixe, nous supposerons qu'il tourne autour de l'origine en décrivant un certain contour $C$; alors, le point correspondant $t$ tournera également autour de l'origine, mais en sens inverse, en décrivant le contour $\Gamma$ qui correspond à $C$; on aura d'ailleurs évidemment

$$\frac{dz}{z} + \frac{dt}{t} = 0. \tag{6}$$

De plus, à une valeur de $z$ extérieure à $C$, correspond une valeur de $t$ intérieure à $\Gamma$, et inversement.

Nous supposerons:

1° que la fonction $f(z)$ est holomorphe à l'intérieur du contour $C$ et sur ce contour;

2° que la fonction $\varphi(t)$ est holomorphe à l'intérieur du contour $\Gamma$ et sur ce contour.

3. Cela posé, formons l'intégrale

$$I = \int f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)\frac{dz}{z} \tag{7}$$

prise le long du contour $C$, dans le sens direct, laquelle équivaut, en vertu de la relation (6), à l'intégrale

$$\int f\left(\frac{x}{t}\right)\varphi(t)\frac{dt}{t},$$

prise (dans le sens direct) le long de $\Gamma$, puisque le sens direct sur l'un des contours correspond au sens rétrograde sur l'autre.

*L'intégrale $I$ ne dépend pas du choix du contour $C$*, tant que celui-ci vérifie les deux conditions spécifiées tout à l'heure: autrement dit, si l'on remplace le contour $C$ par un contour $C'$ satisfaisant aux mêmes conditions, l'intégrale n'est pas changée. Cela résulte immédiatement de ce que la fonction $\frac{1}{z}f(z)\varphi\left(\frac{x}{z}\right)$ est holomorphe entre $C$ et $C'$.

D'ailleurs *$I$ est, pour un choix déterminé du contour $C$, une fonction holomorphe de $x$.*

Donc $I$ est une fonction holomorphe de $x$ tant que cette quantité et les contours $C, \Gamma$ varient de manière que les conditions du n° précédent ne cessent pas d'être vérifiées.

Si enfin le module de $x$ est inférieur à $kl$, on peut supposer les contours $C, \Gamma$ respectivement intérieurs aux cercles de convergence des séries (1), (2) et, par conséquent, utiliser les développements de $f$ et de $\varphi$: il vient alors immédiatement

$$I = 2i\pi\psi(x).$$

En un mot, *l'intégrale $\frac{I}{2i\pi}$ fournit la continuation analytique de la série* (3).

4. Il reste à examiner pour quelles valeurs de $x$ nous pourrons construire les contours $C, \Gamma$ possédant les propriétés demandées.

Soient $S, \Sigma$ deux aires comprenant l'origine, que nous supposerons, pour fixer les idées, simplement connexes et dans lesquelles les fonctions $f, \varphi$ sont respectivement holomorphes. Donnons-nous encore, pour un instant, la valeur de $x$: le lieu des points $z$, tels que les points $t$ correspondants soient situés sur le contour de $\Sigma$, est une certaine courbe fermée $c_x$ et un point $t$ sera à l'intérieur ou à l'extérieur de $\Sigma$, suivant qu'il correspond à un point $z$ extérieur ou intérieur à $c_x$.

Toutes les courbes $c_x$ correspondant aux diverses valeurs de $x$ seront d'ailleurs semblables entre elles.

Nous appellerons *produit* des aires $S$ et $\Sigma$, et nous désignerons par la notation $S\Sigma$, l'aire lieu des points $x$ tels que la courbe $c_x$ soit comprise tout entière à l'intérieur de $S$: aire qui est limitée par la courbe lieu des points $x$ tels, que $c_x$ touche intérieurement le contour de $S$.

5. Ce produit ne dépend pas de l'ordre des facteurs; car la définition précédente peut évidemment se remplacer par celle-ci:

*L'aire $S\Sigma$ est formée par les points dont les affixes ne peuvent pas être obtenues en multipliant l'affixe d'un point extérieur à $S$ par celle d'un point extérieur à $\Sigma$.*

6. A quelle condition cette aire $S\Sigma$ sera-t-elle connexe? Considérons toutes les courbes $c_x$ qui passent par un point déterminé $\alpha$, et supposons qu'il existe un arc $\alpha\alpha_1$ intérieur à toutes ces courbes (ou pouvant avoir des points communs avec quelques unes d'entre elles) et partant du point $\alpha$ pour aboutir à un point $\alpha_1$ plus rapproché de l'origine que le premier. Alors, si l'on pose $x_1 = \frac{\alpha_1}{\alpha} x$, on voit que la courbe $c_{x_1}$ sera intérieure à $c_x$, quel que soit $x$; et même on pourra aller de $x$ à $x_1$ par un arc (à savoir l'arc semblable à $\alpha\alpha_1$) tel que, pour tout point $y$ de cet arc, la courbe $c_y$ soit intérieur à $c_x$.

Si donc le point $x$ est intérieur à l'aire $S\Sigma$, il en est de même de tous les points de l'arc $xx_1$, et aussi de l'arc $x_1x_2$ joignant le point $x_1$ au point d'affixe $x_2 = \frac{\alpha_1}{\alpha} x_1$; et ainsi de suite. En un mot, on peut, sans sortir de l'aire $S\Sigma$, passer de tout point $x$ intérieur à cette aire à des points infiniment voisins de l'origine.

Donc l'aire $S\Sigma$ est connexe.

Il est clair, d'ailleurs, qu'on obtiendra une autre condition également suffisante, mais non nécessaire, en substituant, dans ce que nous venons de dire, l'aire $S$ à l'aire $\Sigma$ et inversement.

7. L'aire $S\Sigma$ est celle dans laquelle nous pourrons faire varier $x$ sans que la définition et les propriétés fondamentales de l'intégrale $I$ cessent de subsister.

Si, en effet, $x$ est intérieur à cette aire $S\Sigma$, on pourra prendre pour le contour $C$ l'un quelconque de ceux qui contiennent $c_x$ à leur intérieur, tout en étant eux mêmes intérieurs à $S$.

Au contraire, si $x$ est extérieur à l'aire $S\Sigma$, le contour de $\Sigma$ correspond à une courbe $c_x$ qui sort de l'aire $S$ et il en sera, a fortiori, de même de tout contour $\Gamma$ intérieur à $\Sigma$.

8. Soient décrits, avec l'origine comme centre, un cercle de rayon $K > k$ dans le plan de la variable $z$, un cercle de rayon $L > l$ dans le plan de la variable $t$. Supposons que, dans ces cercles, les fonctions $f(z)$, $\varphi(t)$ aient chacune un certain nombre de points singuliers que nous supposerons isolés, pour simplifier: soient

$$a_\mu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots, n)$$

les points singuliers de $f(z)$,

$$b_\nu \qquad (\nu=1,2,\ldots,p)$$

ceux de $\varphi(t)$. Nous joindrons les premiers à la circonférence de rayon $K$, les seconds à la circonférence de rayon $L$, par des rayons ou, plus généralement, par des spirales logarithmiques toutes semblables entre elles et ayant l'origine comme pôle.

Nous pourrons prendre, pour les aires $S$ et $\Sigma$, celles qu'on obtient en pratiquant, suivant ces spirales, des sections dans les deux cercles précédents. L'aire $S\Sigma$ sera alors celle qu'on déduira d'un cercle $C$ ayant pour rayon la plus petite des quantités $kL$ et $lK$, en y pratiquant des sections suivant des spirales logarithmiques semblables aux précédentes et partant des points

$$c_{\mu\nu} = a_\mu b_\nu. \qquad \left(\begin{smallmatrix}\mu=1,2,\ldots,n\\ \nu=1,2,\ldots,p\end{smallmatrix}\right)$$

Donc la fonction $\psi$ est holomorphe à l'intérieur de l'aire ainsi définie; comme, d'ailleurs, la forme des spirales logarithmiques employées est arbitraire, *les seuls points singuliers de $\psi(x)$, à l'intérieur du cercle $C$, sont les points $c_{\mu\nu}$.* C'est le résultat même que nous avions en vue.

9. Ce résultat peut être considéré comme généralisant, à un certain point de vue, celui qui figure dans ma thèse [1] et qui se rapporte aux points singuliers de la série

$$\Sigma C_m a_m x^m \tag{8}$$

où

$$C_m = \int_0^1 V(t)t^m dt.$$

Il présente, comme ce dernier, cette particularité d'être valable dans toute l'étendue du plan, tant en dehors qu'à l'intérieur du cercle de convergence: en un mot, de fournir une propriété du prolongement analytique d'une fonction donnée par son développement en série de puissances.

---

[1] Journal de M. Jordan, 4e série, tome 8; 1892; nos 35—37.

On doit toutefois observer qu'il lui manque, pour servir à la connaissance de ce prolongement analytique, un autre caractère important: ce caractère est l'invariance vis à vis de la transformation par laquelle on passe du développement de $f(x)$ à celui de $f(x+h)$ ($h$ étant une constante quelconque).

Les difficultés que l'on rencontre dans l'étude des fonctions d'après leur développement taylorien tiennent, en effet, à la complication des formules qui lient entre eux les coefficients de ces deux développements (supposés ordonnés suivant les puissances de $x$); et l'un des problèmes dont la solution serait le plus essentielle pour cette étude est la recherche de fonctions des coefficients invariantes, non seulement vis à vis de la transformation que ces formules définissent (ce qui ne présenterait aucune difficulté, au moins pour les petites valeurs de $h$, et serait, d'autre part, sans utilité), mais encore par cette transformation, combinée avec l'addition d'un polynome quelconque à $f(x)$.

Malheureusement nous ne connaissons guère, dans cet ordre d'idées, qu'un seul exemple d'invariance ou plutôt de covariance: c'est celui des dérivées de $f(x)$ et, plus généralement, ainsi que je l'ai remarqué,[1] du symbole

$$D_x^a f(x) = \int_0^x (x-z)^a f(z)\,dz.$$

Quoiqu'il en soit, on serait très probablement conduit à des applications intéressantes par l'examen des cas où la série $\psi(x)$ aurait un rayon de convergence supérieur au produit des rayons de convergence primitifs $k$ et $l$: ce qui pourra se produire lorsque la quantité $|\sqrt[m]{a_m}|$ ne tendra pas régulièrement vers $\frac{1}{k}$.

10. En terminant, signalons quelques formules analogues à la formule (4) et relatives aux séries de la forme $a_m e^{-\lambda_m u}$.

Soient

$$F(u) = \sum_m a_m e^{-\lambda_m u} \tag{9}$$

$$\Phi(v) = \sum_m b_m e^{-\lambda_m v} \tag{10}$$

[1] loc cit., n° 31, note.

deux telles séries, absolument convergentes pour certaines valeurs de $R(u)$ [1] et de $R(v)$. Considérons la quantité

$$(11) \qquad \frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} F(u+wi)\Phi(v-wi)\,dw.$$

Comme on a

$$F(u+wi)\Phi(v-wi)$$
$$=\sum_{m,m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u+\lambda_{m'} v)}[\cos(\lambda_m-\lambda_{m'})w + i\sin(\lambda_m-\lambda_{m'})w],$$

le développement de l'expression (11) comprendra deux parties: l'une (celle qui correspond à $m=m'$) sera égale à $\Psi(u+v)$, où l'on a posé

$$(12) \qquad \Psi(u)=\sum_m a_m b_m e^{-\lambda_m u}.$$

Quant aux termes restants, qui sont de la forme

$$(13) \qquad a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u+\lambda_{m'} v)}\frac{\sin(\lambda_m-\lambda_{m'})A}{(\lambda_m-\lambda_{m'})A}, \qquad (m \neq m')$$

ils constituent un ensemble qui tend vers zéro pour $A$ infini; car chacun d'eux tend vers zéro et, d'autre part, la série qu'ils forment est uniformément convergente quel que soit $A$, puisque ses termes sont plus petits en valeur absolue que ceux de la série

$$\sum_{m,m'} a_m b_{m'} e^{-(\lambda_m u+\lambda_{m'} v)},$$

laquelle est absolument convergente, d'après les hypothèses faites sur $F$ et $\Phi$.

Si donc nous appelons *valeur moyenne* de $f(w)$ l'expression

$$\lim_{A=\infty}\frac{1}{2A}\int_{-A}^{+A} f(w)\,dw,$$

[1] $R(u)$ désigne la partie réelle de $u$.

il viendra

$$\text{Val. moy. } (F(u+wi)\Phi(v-wi)) = \Psi(u+v).$$

On aura ainsi

$$\text{Val. moy. } [\zeta(u+wi)\zeta(v-wi)] = \zeta(u+v),$$

$\zeta$ étant la fonction de Riemann; et, plus généralement, le symbole $D$ représentant une différentiation,

$$\text{Val. moy. } [D^p\zeta(u+wi)D^q\zeta(v-wi)] = D^{p+q}\zeta(u+v).$$

Les fonctions

$$\zeta(u)(1-2^{1-u}) = \Sigma(-1)^m m^{-u} \quad \text{et} \quad \frac{\zeta(2u)}{\zeta(u)} = \prod \frac{1}{1+\frac{1}{p^u}}$$

ont des développements identiques à celui de $\zeta$, aux signes des termes près. On aura donc

$$\text{Val. moy. } [\zeta(u+wi)(1-2^{1-u-wi})\zeta(v-wi)(1-2^{1-v+wi})]$$
$$= \text{Val. moy. } \left(\frac{\zeta[2(u+wi)]}{\zeta(u+wi)}\,\frac{\zeta[2(v-wi)]}{\zeta(v-wi)}\right) = \zeta(u+v),$$

et autres formules analogues.

En particulier, pour $u$ réel, il vient

$$\text{Val. moy. } |\zeta(u+wi)|^2 = \zeta(2u),$$
$$\text{Val. moy. } |D^p\zeta(u+wi)|^2 = D^{2p}\zeta(2u),$$
$$\text{Val. moy. } |\zeta(u+wi)(1-2^{1-u-wi})|^2 = \zeta(2u),$$

(14) $$\text{Val. moy. } \left|\frac{\zeta[2(u+wi)]}{\zeta(u+wi)}\right|^2 = \zeta(2u).$$

Il est intéressant de remarquer que le second membre de cette dernière formule reste fini, pour $u$ compris entre $\frac{1}{2}$ et $1$; et on peut se

demander si la formule ne subsisterait pas pour ces valeurs de $u$; ce qui exigerait, bien entendu, la réalité de racines de l'équation [1]

$$\zeta\left(\frac{1}{2} + wi\right) = 0. \tag{15}$$

Cenon, 18 août 1897.

---

[1] Il est probable qu'il ne faudrait pas chercher à démontrer la réalité des racines de l'équation (15) par des considérations de cette espèce, non plus que par toute autre voie reposant sur la décomposition de $\zeta(u)$ en produit. Cette décomposition ne permet, en effet, d'utiliser que les propriétés suivantes de la fonction $\zeta$:

1° $\zeta(u)$ (pour $R(u) > 1$) est le produit de facteurs de la forme $\frac{1}{1 - p^{-u}}$, où les nombres $p$ sont positifs et croissent indéfiniment;

2° $\zeta(u)$ est uniforme dans tout le plan et égal au quotient, par $\frac{u(u-1)}{2} \pi^{-\frac{u}{2}} \Gamma\left(\frac{u}{2}\right)$ d'une fonction entière de genre zéro par rapport à $\left(u - \frac{1}{2}\right)^2$.

Or rien ne porte à croire qu'il n'existe pas une infinité de fonctions satisfaisant aux conditions précédentes, sans avoir leurs zéros situés sur la droite $R(u) = \frac{1}{2}$.

Bien entendu, il se peut que les racines de l'équation (15) soit réelles sans que la formule (14) soit vraie et sans même que son premier membre ait un sens.

# SUR LES SÉRIES DE TAYLOR QUI ONT UNE INFINITÉ DE POINTS SINGULIERS

PAR

E. FABRY

à MONTPELLIER.

1. Une série, ordonnée suivant les puissances entières de la variable, définit une fonction analytique; s'il existe sur la circonférence de convergence des points non singuliers, la fonction est définie pour des points extérieurs au cercle de convergence par de nouvelles séries déduites de la première. Mais il y a des cas où ce prolongement analytique est impossible, c'est à dire où tous les points de la circonférence de convergence sont singuliers. M. FREDHOLM en a indiqué un exemple (C. R. 24 mars 1890). M. HADAMARD a montré (Journal de Liouville, 4ième série, t. 8) que la circonférence de convergence est une coupure pour la série $\Sigma a_\nu z^{c_\nu}$, où $c_\nu$ représente une suite de nombres entiers tels que $\frac{c_{\nu+1} - c_\nu}{c_\nu}$ reste supérieur à une quantité $k$ fixe. M. BOREL a montré (C. R. 5 octobre 1896) que cela a lieu dans le cas plus général où $c_{\nu+1} - c_\nu > k\sqrt{c_\nu}$. Enfin j'ai démontré (Annales de l'Ecole normale, octobre 1896), qu'il en est de même toutes les fois que $c_{\nu+1} - c_\nu$ augmente indéfiniment, et même dans des cas plus généraux où la série peut être complète.

M. BOREL (C. R. 14 décembre 1896) considère comme les plus générales les séries dont les coefficients sont choisis arbitrairement, et indépendemment les uns des autres, et démontre que dans ce cas le prolongement analytique est impossible. J'ai donné (C. R. 18 janvier 1897)

une nouvelle démonstration de ce théorème, en partant de considérations plus simples, qui permettent de présenter le résultat sous une forme plus générale. C'est cette démonstration qui sera développée dans la première partie de ce mémoire. Je donnerai ensuite, sous une forme nouvelle et plus générale, quelques-uns des théorèmes que j'ai déjà signalés (Annales de l'Ecole normale), et j'en déduirai des séries particulières ayant pour coupure une portion déterminée de la circonférence de convergence.

Pour étudier la nature d'un point de la circonférence de convergence, on peut, par un changement de variable, ramener le rayon de convergence à l'unité, et le point considéré à coïncider avec $z = 1$.

2. Soit

$$f(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n + \dots$$

une série dont le cercle de convergence a pour rayon 1, c'est à dire telle que la limite supérieure, pour $n = \infty$, de $\sqrt[n]{|a_n|}$ soit égale à 1; celle de $\frac{1}{n} L|a_n|$ est alors 0. $\varepsilon$ étant une quantité positive aussi petite que l'on voudra, on peut trouver des valeurs de $n$ supérieures à tout nombre donné, telles que $|a_n| > (1 - \varepsilon)^n$, et il existe un nombre tel que pour toute valeur de $n$ supérieure on ait:

$$|a_n| < (1 + \varepsilon)^n.$$

Soit $t$ une quantité réelle comprise entre 0 et 1:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(t)}{\underline{|n}} (z - t)^n.$$

$$\frac{f^n(t)}{\underline{|n}} = a_n + a_{n+1} t \frac{n+1}{1} + \dots + a_{n+p} t^p \frac{(n+1)\dots(n+p)}{1 . 2 \dots p} + \dots.$$

Si la limite supérieure de $\sqrt[n]{\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}}$, pour $n = \infty$, est $\frac{1}{1-t}$, cette nouvelle série aura pour rayon de convergence $1 - t$, et $z = 1$ sera un point singulier de $f(z)$.

Pour calculer l'ordre de grandeur des coefficients, remarquons que l'expression

$$1 . 2 \ldots n\left(\frac{e}{n}\right)^n \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\frac{k}{n}}$$

augmente avec $n$ si $k \geqq \frac{1}{12}$, et diminue si $k = 0$; car les logarithmes de deux termes consécutifs ont pour différence:

$$1 + \left(n - \frac{1}{2}\right) L\left(1 - \frac{1}{n}\right) + \frac{k}{n(n-1)} = \sum_{\nu=2}^{\infty} \frac{k - \frac{\nu - 1}{2\nu(\nu+1)}}{n^\nu}$$

expression qui reste négative si $k = 0$, et positive si $k \geqq \frac{1}{12}$. On en déduit:

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n} > \underline{|n} > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}\, e^{1 - \frac{1}{12} + \frac{1}{12n}} > \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{en}$$ [1]

et

$$e^{-\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p < \frac{\underline{|(n+p)}}{\underline{|n}\,\underline{|p}} t^p < \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p.$$

D'autre part $|a_{n+p}| < (1 + \varepsilon)^{n+p}$, $\varepsilon$ étant aussi petit que l'on voudra, pourvu que $n$ soit assez grand. Il en résulte que, dans $\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}$, il est inutile de tenir compte des termes qui suivent $a_{n+p}$, $p$ étant compris entre $n\frac{t+\lambda}{1-t}$ et $n\frac{t+\lambda}{1-t} - 1$. En effet:

$$\left| \sum_{\nu=p}^{\infty} a_{n+\nu} t^\nu \frac{\underline{|(n+\nu)}}{\underline{|n}\,\underline{|\nu}} \right| < (1+\varepsilon)^{n+p} \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p$$

$$\times \left[1 + (1+\varepsilon) t \frac{n+p+1}{p+1} + (1+\varepsilon)^2 t^2 \frac{(n+p+1)(n+p+2)}{(p+1)(p+2)} + \ldots\right].$$

Dans cette suite, le rapport de deux termes consécutifs est

$$(1+\varepsilon) t \frac{n+p+\nu}{p+\nu} \leqq (1+\varepsilon) t \frac{n+p+1}{p+1} < (1+\varepsilon) \frac{t+\lambda t}{t+\lambda} < 1$$

---

[1] la théorie des intégrales Eulériennes donne pour $\underline{|n}$ une valeur plus approchée, qui est ici inutile.

si $\varepsilon$ est choisi assez petit, $t$ et $\lambda$ restant fixes. Alors

$$\frac{1}{n} L \left| \sum_{\nu=p}^{\infty} a_{n+\nu} t^\nu \frac{|\underline{(n+\nu)}}{|\underline{n}\,|\underline{\nu}} \right| < \frac{1+\lambda}{1-t} L(1+\varepsilon) + L\frac{n+p}{n}$$

$$+ \frac{p}{n} L \frac{n+p}{p} t - \frac{1}{n} L\left(1 - (1+\varepsilon)\frac{t+\lambda t}{t+\lambda}\right)$$

expression qui diffère aussi peu que l'on voudra de

$$L\frac{1}{1-t} + \frac{1+\lambda}{1-t} L(1+\lambda) - \frac{t+\lambda}{1-t} L\left(1+\frac{\lambda}{t}\right) = L\frac{1-\theta}{1-t}$$

$\theta$ étant une quantité positive qui augmente avec $\lambda$. Soit $\theta'$ compris entre o et $\theta$, si $n$ est assez grand, on aura

$$\left| \sum_{\nu=p}^{\infty} a_{n+\nu} t^\nu \frac{|\underline{(n+\nu)}}{|\underline{n}\,|\underline{\nu}} \right| < \left(\frac{1-\theta'}{1-t}\right)^n.$$

De même si $p$ est compris entre $n\frac{t-\lambda}{1-t}$ et $n\frac{t-\lambda}{1-t} + 1$, $(\lambda < t)$, dans la somme $a_n + a_{n+1} t \frac{n+1}{1} + \ldots + a_{n+p} t^p \frac{|\underline{(n+p)}}{|\underline{n}\,|\underline{p}}$, $t\frac{n+\nu}{\nu}$ reste plus grand que 1, et le module de cette somme est plus petit que

$$(p+1)(1+\varepsilon)^{n+p} \sqrt{\frac{n+p}{np}} \left(\frac{n+p}{n}\right)^n \left(\frac{n+p}{p} t\right)^p;$$

il en résulte:

$$\frac{1}{n} L \left| \sum_{\nu=0}^{p} a_{n+\nu} t^\nu \frac{|\underline{(n+\nu)}}{|\underline{n}\,|\underline{\nu}} \right| < \frac{1}{n} L(p+1) + \frac{n+p}{n} L(1+\varepsilon)$$

$$+ L\frac{n+p}{n} + \frac{p}{n} L\frac{n+p}{p} t$$

qui a la même limite que

$$L\frac{1}{1-t} + \frac{1-\lambda}{1-t} L(1-\lambda) - \frac{t-\lambda}{1-t} L\left(1-\frac{\lambda}{t}\right) <$$

$$L\frac{1}{1-t} + \frac{1+\lambda}{1-t} L(1+\lambda) - \frac{t+\lambda}{1-t} L\left(1+\frac{\lambda}{t}\right)$$

car la différence de ces deux expressions diminue, si $\lambda$ augmente entre o et $t$.

Donc si, dans $\frac{f^n(t)}{|\underline{n}}$, on ne conserve que les termes tels que $p$ reste compris entre $n\frac{t-\lambda}{1-t}$ et $n\frac{t+\lambda}{1-t}$, la somme des termes supprimés a un module plus petit que $2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n$. Si la racine $n^{\text{ième}}$ a pour limite supérieure $\frac{1}{1-t}$, après la suppression de ces termes, il existera une suite illimitée de valeurs de $n$ telles que

$$\left|\frac{f^n(t)}{|\underline{n}}\right| > \left(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\right)^n\left[1-2\left(\frac{1-\theta}{1-\varepsilon}\right)^n\right]$$

et $\sqrt[n]{\frac{f^n(t)}{|\underline{n}}}$ a aussi pour limite supérieure $\frac{1}{1-t}$.

D'autre part, si $\frac{p}{n}$ tend vers $\frac{t}{1-t}$, $\frac{n+p}{p}t$ tend vers 1, et

$$\frac{1}{n}L\left(\frac{|\underline{(n+p)}}{|\underline{n}\,|\underline{p}}t^p\right)$$

reste compris entre les deux quantités

$$\frac{p}{n}L\frac{n+p}{p}t + L\frac{n+p}{n} + \frac{1}{2n}L\frac{n+p}{np}$$

et

$$\frac{p}{n}L\frac{n+p}{p}t + L\frac{n+p}{n} + \frac{1}{2n}L\frac{n+p}{np} - \frac{3}{2n}$$

qui ont la même limite $L\frac{1}{1-t}$.

Mettons en facteur ce coefficient $\frac{|\underline{(n+p)}}{|\underline{n}\,|\underline{p}}t^p$, et posons $n+p=m$

$$\varphi_m(t) = a_m + a_{m+1}t\frac{m+1}{p+1} + \ldots + a_{m+\nu}t^\nu\frac{(m+1)\ldots(m+\nu)}{(p+1)\ldots(p+\nu)}$$
$$+ a_{m-1}\frac{1}{t}\frac{p}{m} + \ldots + a_{m-\nu}\frac{1}{t^\nu}\frac{p(p-1)\ldots(p-\nu+1)}{m(m-1)\ldots(m-\nu+1)}$$

où $p$ augmente indéfiniment avec $m$, de façon que $\frac{p}{m}$ tende vers $t$, et $\nu \geqq \lambda m$, $0 < \lambda < t < 1$. On a

$$\frac{f^n(t)}{\underline{|n}} = \varphi_m(t)\, t^p \frac{\underline{|(n+p)}}{\underline{|n}\,\underline{|p}} + \psi(t)$$

$\psi$ comprenant les termes $a_{n+\nu}$ où $\nu > p\left(1 + \lambda\frac{m}{p}\right)$, et ceux où $\nu < p\left(1 - \lambda\frac{m}{p}\right)$, qui sont ceux que nous avons supprimés. Si $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a pour limite supérieure $1$, pour $m = \infty$, on aura, pour une suite de valeurs de $n$:

$$\left|\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}\right| > (1-\varepsilon)^m\left(\frac{1-\varepsilon}{1-t}\right)^n - 2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n$$

$\varepsilon$ tendant vers $0$, et $\sqrt[n]{\left|\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}\right|}$ aura pour limite supérieure $\frac{1}{1-t}$.

En posant $z = te^{\omega i}$, $t = 1$ correspond à $z = e^{\omega i}$, et l'on est conduit au théorème suivant:

Soit

$$\varphi_m(z) = \sum a_{m+\nu} z^\nu \frac{\underline{|(m+\nu)}\,\underline{|p}}{\underline{|(p+\nu)}\,\underline{|m}}$$

où $\nu$ prend toutes les valeurs entières comprises entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$, $z = te^{\omega i}$, $\frac{p}{mt}$ tendant vers $1$, et $0 < \lambda < t < 1$. Si $\sqrt[m]{|\varphi_m(z)|}$ a pour limite supérieure $1$, pour $m = \infty$, $z = e^{\omega i}$ est un point singulier de $f(z)$.

$t$ peut ici varier avec $m$, pourvu qu'il reste compris entre deux limites comprises entre $0$ et $1$, $\frac{p}{mt}$ tendant vers $1$.

3. Laissant $t$ fixe, donnons à $\omega$ les valeurs $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$. $\sum_{k=0}^{n-1} e^{\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)\nu i}$ est égal à $ne^{\alpha\nu i}$ si $\nu$ est un multiple de $n$, et nul pour les autres valeurs entières de $\nu$. Si $n > \lambda m$, on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \varphi_m\left(te^{\left(\alpha+\frac{2k\pi}{n}\right)i}\right) = na_m.$$

Parmi les $n$ arguments $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ il y en a donc au moins un tel que

$$|\varphi_m(te^{\omega i})| \geqq |a_m|$$

et il y a une infinité de valeurs de $\omega$ vérifiant cette inégalité.

Si $\sqrt[m]{|a_m|}$ ne tend pas regulièrement vers 1, on ne prendra dans $\varphi_m$ que des valeurs de $m$ telles que $\sqrt[m]{|a_m|}$ tende vers 1. Soit alors $A_m$ une quantité positive plus petite que $|a_m|$, telle que $\sqrt[m]{A_m}$ tende vers 1. On pourra choisir $\sqrt[m]{A_m}$ tendant vers 1 aussi lentement que l'on voudra, et ne prendra que les valeurs de $m$ telles que $|a_m| \geqq A_m$, ce qui est toujours possible. Posons alors

$$\varphi_m(te^{\omega i}) \geqq A_m$$

à chaque valeur de $m$ correspondent une infinité de valeurs de $\omega$ qui vérifient cette inégalité.

Si un arc de la circonférence de convergence ne contient aucun point singulier, $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ a une limite supérieure plus petite que 1 pour toutes les valeurs de $\omega$ correspondantes, et l'on peut trouver une quantité $\varepsilon$ telle que

$$|\varphi_m(te^{\omega i})| < (1-\varepsilon)^m < A_m$$

pour toute valeur assez grande de $m$. Aucun des arguments $\omega$ ne se trouvera alors sur cet arc, à partir d'une valeur déterminée de $m$.

Si les points singuliers de la circonférence de convergence sont en nombre limité, les valeurs de $\omega$ auront des limites déterminées en nombre fini, lorsque $m$ augmente indéfiniment.

Considérons le cas général où les coefficients $a$ sont donnés arbitrairement, c'est à dire indépendemment les uns des autres, avec la seule condition que $\frac{1}{n}L|a_n|$ ait pour limite supérieure 0. On peut former des fonctions $\varphi_m$ n'ayant aucun terme $a$ commun, en prenant pour $m$ une suite de valeurs $m_1 m_2 \ldots m_\nu \ldots$ telles que $m_\nu\left(\frac{1-\lambda}{1+\lambda}\right)^\nu$ augmente constamment, de sorte que $m_{\nu+1}(1-\lambda) \geqq m_\nu(1+\lambda)$. Cela a lieu, par exemple, si $|m_\nu - (1+\lambda')^\nu|$ reste fini, $\lambda' > \frac{2\lambda}{1-\lambda}$, pourvu que $\nu$ soit assez grand. On a ainsi une suite de valeurs de $m$, à chacune desquelles correspond au moins un argument $\omega_m$; ces arguments se déduisent de coefficients $a$

distincts, et peuvent être choisis arbitrairement en même temps que les $a$ correspondants. Au delà de toute valeur de $m$, il y aura des arguments $\omega_m$ sur un arc quelconque, et tout arc du cercle de convergence contiendra des points singuliers.

Si un point du cercle de convergence n'était pas singulier, il y aurait un arc, comprenant ce point, ne contenant aucun point singulier; et au delà d'une valeur déterminée de $m$ il n'y aurait aucun argument $\omega_m$ sur cet arc, ce qui limite le choix des coefficients $a$ correspondants.

A une suite illimitée quelconque de fonctions $\varphi_m$, telles que $\frac{1}{m} L|a_m|$ tende vers 0, correspond ainsi au moins un point singulier. Mais en général on pourra toujours en déduire une infinité. En effet, $n$ étant un nombre entier fixe, posons:

$$\psi_m(te^{\alpha i}) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} e^{-\frac{2k\mu}{n}\pi i}\varphi_m\left(te^{\left(\alpha+\frac{2k}{n}\pi\right)i}\right) = \sum_h a_{m+\mu+hn} t^{\mu+hn} e^{\alpha(\mu+hn)i} \frac{|\underline{(m+\mu+hn)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\mu+hn)}\,|\underline{m}}$$

on a

$$\frac{1}{\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1} e^{-\frac{2k\mu}{n\nu}\pi i}\psi_m\left(te^{\left(\alpha+\frac{2k}{n\nu}\pi\right)i}\right) = a_{m+\mu} t^{\mu} e^{\mu\alpha i}\frac{|\underline{(m+\mu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\mu)}\,|\underline{m}}$$

si $n\nu > \lambda m + |\mu|$.

Si $\frac{\mu}{m}$ et $\frac{1}{m} L|a_{m+\mu}|$ tendent vers 0, $\frac{1}{m} L\left|a_{m+\mu}t^{\mu}\frac{|\underline{(m+\mu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\mu)}\,|\underline{m}}\right|$ tend aussi vers 0; et, si $A_m$ est choisi assez petit, $\frac{1}{m} LA_m$ tendant vers 0, parmi les $\nu$ arguments $\alpha + \frac{2k}{n\nu}\pi$ il y en aura au moins un pour lequel $|\psi_m(te^{\alpha i})| > A_m$, et il existe au moins un nombre entier $k$ tel que $\left|\varphi_m\left(te^{\left(\alpha+\frac{2k}{n}\pi\right)i}\right)\right| > A_m$.

Mais $\psi_m$ ne contient que les coefficients $a$ de la forme $a_{m+\mu+kn}$; en faisant varier $\mu$, on peut former $n$ expressions $\psi$ n'ayant aucun terme commun, à chacune desquelles correspondent des arguments $\alpha$, pourvu que $\frac{1}{m} L|a_{m+\mu}|$ tende vers 0, au moins pour un terme de chacune de ces $n$ suites, où $\frac{\mu}{m}$ tend vers 0. Les coefficients $a$ de $\varphi_m$ sont ainsi décomposés en $n$ suites, à chacune desquelles correspond en général au moins

un argument $\alpha$, et l'inégalité $|\varphi_m(te^{\omega i})| > A_m$ sera vérifiée pour l'une des valeurs $\omega = \alpha + \frac{2k\pi}{n}$ de chacune de ces $n$ suites. Les coefficients $a$ étant arbitraires, ces $n$ arguments $\alpha$ sont aussi indépendants, et en général les $n$ séries de $n$ termes $\alpha + \frac{2k\pi}{n}$ n'auront aucun terme commun; de sorte que l'on obtiendra ainsi au moins $n$ valeurs distinctes de $\omega$. Et comme $n$ peut être aussi grand que l'on voudra, il y aura en général, pour chaque valeur de $m$, une infinité de valeurs de $\omega$ qui ne tendront pas vers une limite unique, mais donneront une infinité de points singuliers quelque soit la suite de fonctions $\varphi_m$ considérée. On est ainsi conduit au théorème suivant:

Dans le cas général où les coefficients de la série $\Sigma a_n z^n$ sont supposés arbitraires et indépendants les uns des autres, la circonférence de convergence est une coupure.

4. Soit $a_n = a'_n + ia''_n$. Si les parties réelles $a'_n$ des termes de $\varphi_m$ sont de même signe, pour une suite illimitée de valeurs de $m$ telles que $\frac{1}{m} L|a'_m|$ tende vers 0, $|\varphi_m(t)| > |a'_m|$ et le point $z = 1$ est singulier. On arrive à un résultat beaucoup plus général en considérant les changements de signes successifs de la suite $a'_n$.

Parmi les termes de $\varphi_m$, considérons ceux d'indices successifs $m$, $m + h_1$, $m + h_1 + h_2, \ldots, m + h_1 + h_2 + \ldots + h_n$ et $m - h'_1 \ldots$, $m - h'_1 - h'_2 - \ldots - h'_{n'}$. Soit $h$ le plus grand et $h'$ le plus petit des nombres $h_1, h_2, \ldots, h_n, h'_1, h'_2, \ldots, h'_{n'}$. Supposons que $h'$ augmente indéfiniment avec $m$, $\frac{h}{m}$ tendant vers 0, les derniers indices étant choisis de façon que

$$h_1 + h_2 + \ldots + h_n = h'_1 + h'_2 + \ldots + h'_{n'} = H = Nh$$

où $N$ est un nombre entier, et

$$\lambda m \leqq H < \lambda m + h.$$

Dans la suite des termes $a'$ de $\varphi_m(t)$, considérons ceux qui changent de signe à partir de $a'_m$. Supposons qu'entre $a'_m$ et $a'_{m+h_1-1}$ le nombre des changements de signe soit au plus $\alpha h_1$, entre $a'_{m+h_1}$ et $a'_{m+h_1+h_2-1}$ au plus $\alpha h_2$, et qu'en général entre $a'_{m+h_1+\ldots+h_{\nu-1}}$ et $a'_{m+h_1+\ldots+h_\nu-1}$ il y ait au

plus $\alpha h_\nu$ changements de signe, et $\alpha h'_\nu$ entre $a'_{m-h'_1-\dots-h'_{\nu-1}}$ et $a'_{m-h'_1-\dots-h'_\nu+1}$. Le nombre total des changements de signes entre $a'_{m-H+1}$ et $a'_{m+H-1}$ est ainsi au plus égal à $2\alpha H$.

Soit

$$\psi_m(t) = \sum_{k=-\mu}^{+\mu} A_k \varphi_m\left(te^{k\frac{\pi i}{H}}\right) = \sum_\nu a_{m+\nu} t^\nu \frac{|(m+\nu)\,|p}{|(p+\nu)\,|m} \sum_k A_k e^{k\frac{\nu\pi i}{H}}$$

où les coefficients $A$ seront définis par l'identité

$$F(z) = z^\mu \sum_{k=-\mu}^{+\mu} A_k z^k = \left(ze^{-\frac{\nu_1\pi i}{2H}} - e^{\nu_1\frac{\pi i}{2H}}\right)\dots\left(ze^{-\nu_\mu\frac{\pi i}{2H}} - e^{\nu_\mu\frac{\pi i}{2H}}\right)$$

$$\times\left(ze^{\nu'_1\frac{\pi i}{2H}} - e^{-\nu'_1\frac{\pi i}{2H}}\right)\dots\left(ze^{\nu'_\mu\frac{\pi i}{2H}} - e^{-\nu'_\mu\frac{\pi i}{2H}}\right)$$

alors

$$\Sigma A_k e^{k\frac{\nu\pi i}{H}} = e^{-\mu\frac{\nu\pi i}{H}} F\left(e^{\nu\frac{\pi i}{H}}\right) = 4^\mu \sin\frac{\nu_1-\nu}{2H}\pi \sin\frac{\nu'_1+\nu}{2H}\pi \dots \sin\frac{\nu_\mu-\nu}{2H}\pi\sin\frac{\nu'_\mu+\nu}{2H}\pi;$$

ces quantités réelles s'annulent et changent de signe pour les valeurs $\nu = \nu_1, \nu_2, \dots \nu_\mu, -\nu'_1, -\nu_2 \dots -\nu'_\mu$, et ne s'annulent pour aucune autre valeur de $\nu$ comprise entre $-H$ et $+H$, si aucun de ces indices $\nu$ et $\nu'$ n'est supérieur à $H$.

Prenons pour ces indices $\nu$ ceux des termes $a'_{m\pm\nu}$ qui changaient de signe, de façon que les parties réelles des coefficients de $\psi_m(t)$ soient toutes de même signe. On peut en outre prendre pour $\nu$ deux des indices successifs qui restent, ou ceux des termes extrêmes, de façon que dans chacun des $n+n'$ intervalles, $m+h_1+\dots+h_{\nu-1}$ à $m+h_1+\dots+h_\nu-1$, il y en ait un nombre compris entre $\alpha h_\nu - 2$ et $\alpha h_\nu + 2$, et que

$$\alpha H \geqq \mu > \alpha H - 1.$$

Alors

$$|\psi_m(t)| > |a'_m|\,\Sigma A_k$$

et il existe une valeur de $k$, comprise entre $-\alpha H$ et $+\alpha H$, telle que

$$\left|A_k\varphi_m\left(te^{k\frac{\pi i}{H}}\right)\right| > \frac{1}{2\mu+1}|\psi_m(t)| > \frac{|a'_m|\,\Sigma A_k}{2\alpha(\lambda m+h)+1}.$$

Mais on a:

$$\Sigma A_k = 4^\mu \sin\frac{\nu_1\pi}{2H}\sin\frac{\nu_1'\pi}{2H}\sin\frac{\nu_2\pi}{2H}\sin\frac{\nu_2'\pi}{2H}\cdots\sin\frac{\nu_\mu\pi}{2H}\sin\frac{\nu_\mu'\pi}{2H}$$

$$> 4^{aH-1}\left(\sin\frac{\pi}{2H}\sin\frac{2\pi}{2H}\cdots\sin\frac{h\pi}{2H}\right)^2 \times \left(\sin\frac{\pi h_1}{2H}\right)^{ah_1+2} \times \left(\sin\pi\frac{h_1+h_2}{2H}\right)^{ah_2+2}$$

$$\times \cdots \left(\sin\pi\frac{h_1+h_2+\cdots+h_n}{2H}\right)^{ah_n+2} \times \left(\sin\frac{\pi h_1'}{2H}\right)^{ah_1'+2}$$

$$\times \cdots \left(\sin\pi\frac{h_1'+h_2'+\cdots+h_{n'}'}{2H}\right)^{ah'_{n'}+2}$$

$$> 4^{aH-1}\left(\frac{|\underline{h}}{H^h}\right)^2 \times \left[\sin\frac{\pi}{2H}\sin\frac{2\pi}{2H}\times\cdots\sin\frac{H\pi}{2H}\right]^{2a+\frac{4}{h'}}$$

$$= \left(\frac{|\underline{h}}{H^h}\right)^2 \times \frac{1}{4\cdot 2^{\frac{4H}{h'}}}(4H)^{a+\frac{2}{h'}} > \frac{eh}{4}\left(\frac{h}{eH}\right)^{2h}\frac{1}{2^{4\frac{\lambda m+h}{h'}}}(4\lambda m)^{a+\frac{2}{h'}}$$

et

$$\frac{1}{m}L\Sigma A_k > -\frac{2L2}{h'}\left(2\lambda + \frac{2h+h'}{m}\right) - \frac{2h}{m}\left(1 + L\frac{m}{h} + L\left(\lambda + \frac{h}{m}\right)\right)$$

expression qui tend vers 0.

D'autre part

$$2\pi i A_k = \int_0^{2\pi} F(e^{\omega i})\frac{i\,d\omega}{e^{(k+\mu)\omega i}},$$

et $|A_k| < M$, $M$ étant le maximum du module de $F(e^{\omega i})$.

$$F(e^{\omega i}) = e^{\mu\omega i}\,4^\mu \sin\left(\frac{\pi\nu_1}{2H} - \frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\nu_1'}{2H} + \frac{\omega}{2}\right)\times\cdots$$

$$\times \sin\left(\frac{\pi\nu_\mu}{2H} - \frac{\omega}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi\nu_\mu'}{2H} + \frac{\omega}{2}\right).$$

Les arcs $\pi\frac{h_1+h_2+\cdots+h_\nu}{H}$ et $-\pi\frac{h_1'+h_2'+\cdots+h_{\nu'}'}{H}$ divisent la circonférence en $n+n'$ parties comprises entre $\pi\frac{h'}{H}$ et $\pi\frac{h}{H}$. Changeons l'ordre

des notations, et représentons, pour le moment, par $\pi\frac{h_0}{H}$ celle de ces parties sur la quelle tombe $\omega$, par $\pi\frac{h_1}{H}, \pi\frac{h_2}{H}, \ldots, \pi\frac{h_n}{H}$ les arcs suivants, $\pi\frac{h_0 + h_1 + \ldots + h_n}{H}$ étant compris entre $\pi$ et $\pi - \pi\frac{h}{H}$. De même $\frac{\pi h'_1}{H}$, $\frac{\pi h'_2}{H}, \ldots, \frac{\pi h'_{n'}}{H}$ seront les arcs qui précèdent $\omega$, $\pi\frac{h_0 + h'_1 + \ldots + h'_{n'}}{H}$ étant aussi compris entre $\pi$ et $\pi - \pi\frac{h}{H}$. On a alors:

$$|F(e^{\omega i})| < 4^{\mu}\left(\sin\frac{\pi h_0}{2H}\right)^{ah_0-2}\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1}{2H}\right)^{ah_1-2}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1+\ldots+h_n}{2H}\right)^{ah_n-2}$$

$$\times\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1}{2H}\right)^{ah'_1-2}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1+\ldots+h'_{n'}}{2H}\right)^{ah'_{n'}-2}$$

$$< 4^{aH}.\left[\left(\sin\frac{\pi h_0}{2H}\right)^{h_0}\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1}{2H}\right)^{h_1}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h_1+\ldots+h_n}{2H}\right)^{h_n}\right.$$

$$\left.\times\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1}{2H}\right)^{h'_1}\times\ldots\left(\sin\pi\frac{h_0+h'_1+\ldots+h'_{n'}}{2H}\right)^{h'_{n'}}\right]^{a-\frac{2}{h'}}$$

$$< 4^{aH}\left[\frac{1}{\sqrt{\sin\frac{\pi h}{2H}}}\sin\frac{2\pi h}{2H}\ldots\sin\frac{(N-1)\pi h}{2H}\right]^{2h\left(a-\frac{2}{h'}\right)}$$

$$= 4^{\frac{2H}{h'}}.\left(\frac{4N}{\left(\sin\frac{\pi}{2N}\right)^3}\right)^{h\left(a-\frac{2}{h'}\right)}$$

$$\frac{1}{m}LM < \frac{2}{h'}\left(\lambda+\frac{h}{m}\right)L4 + \frac{2ah}{m}L2\left(\frac{\lambda m+h}{h}\right)^2,$$

expression qui tend vers 0, en même temps que $\frac{1}{h'}$ et $\frac{h}{m}$.

Quel que soit $k$, $\frac{1}{m}L\frac{\Sigma A_k}{A_k}$ reste supérieur à une quantité qui tend vers 0; et, si $\frac{1}{m}L|a'_m|$ tend vers 0, il y aura un arc $\omega$ compris entre $-\alpha\pi$ et $+\alpha\pi$, tel que $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ ait pour limite supérieure 1, et il y aura un point singulier sur l'arc $\pm\alpha\pi$.

Dans le cas où les nombres $h$ n'augmentent pas indéfiniment, on peut toujours réunir plusieurs groupes de termes, de façon à former de nouveaux groupes pour lesquels le nombre de termes devient infini avec $m$. On peut également poser $a_n = e^{\beta i}(a'_n + ia''_n)$, $\beta$ pouvant varier avec $m$. On est ainsi conduit au résultat suivant:

*Théorème.* Soit $\beta$ un arc variable avec $m$, et $a'_{m+\nu}$ la partie réelle de $a_{m+\nu}e^{-\beta i}$ ($\nu$ restant compris entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$). La suite de ces termes étant divisée en parties contenant chacune $h_1, h_2, \ldots, h_n$ termes consécutifs, et $p_1, p_2, \ldots, p_n$ changements de signes de la suite totale, telles que $\frac{p_\nu}{h_\nu}$ reste plus petit que $\alpha_m$, toutes les quantités $\frac{h}{m}$ tendant vers o; si, pour des valeurs de $m$ telles que $\frac{1}{m} L|a'_m|$ tende vers o, les quantités $\alpha_m$ ont une limite inférieure $\alpha$, pour $m = \infty$, il y aura un point singulier sur l'arc compris entre $-\alpha\pi$ et $+\alpha\pi$.

5. Si les termes $a'$ de $\varphi_m(t)$ ont $q$ changements de signe, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, on pourra diviser ces termes en $n$ groupes de $h$ termes, $\frac{q}{h}$ et $\frac{h}{m}$ tendant vers o, par exemple en choisissant $h$ de façon que $\frac{h}{\sqrt{qm}}$ reste compris entre deux nombres fixes. Alors $\alpha$ tend vers o, et l'on peut énoncer le résultat suivant:

*Théorème.* Si les parties réelles $a'_n$ de $a_n e^{-\beta i}$ ont, entre $n = m \pm \lambda m$, $q$ changements de signes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o pour des valeurs telles que $\frac{1}{m} L|a'_m|$ tende vers o, le point $z = 1$ est singulier.

Soit $a_n = \rho_n e^{\omega_n i}$. La partie réelle de $a_n e^{-\beta i}$ a le signe de $\cos(\omega_n - \beta)$. Formons les différences $\omega_{n+1} - \omega_n$ comprises entre $-\pi$ et $+\pi$ et $\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ où $n$ reste compris entre $m - \lambda m$ et $m + \lambda m$. Si, pour toutes les valeurs de $\beta$ comprises entre $\beta_0$ et $\beta_0 + \gamma$, $\rho_n \cos(\omega_n - \beta)$ a, dans $\varphi_m(t)$, au moins $q$ changements de signe, $\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ sera supérieur ou égal à $q\gamma$, et si $\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n| < \varepsilon$ il y aura au moins une valeur de $\beta$ pour laquelle le nombre des changements de signe est plus petit que $\frac{\varepsilon}{\gamma}$. Donc, si $\frac{1}{m}\Sigma|\omega_{n+1} - \omega_n|$ tend vers o, on peut déterminer

$\beta$ de façon que $\frac{q}{m}$ tende vers o, sans que $\omega_m - \beta$ tende vers o, de sorte que $\frac{1}{m} L |\cos(\omega_m - \beta)|$ tend vers o; et si $\frac{L\rho_m}{m}$ et $\frac{1}{m} \Sigma |\omega_{n+1} - \omega_n|$ tendent vers o, le point $z = 1$ est singulier.

Si on pose $z = te^{-\omega i}$, $\omega_{n+1} - \omega_n$ est remplacé par $\omega_{n+1} - \omega_n - \omega$, ce qui conduit au résultat suivant:

*Théorème.* Si, pour une suite illimitée de valeurs de $m$, telles que $\frac{1}{m} L |a_m|$ tende vers o, les différences $\omega_{n+1} - \omega_n$ des termes $n$ compris entre $m - \lambda m$ et $m + \lambda m$ tendent vers $\omega$, sauf pour un nombre $q$ de ces termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers o, le point $z = e^{-\omega i}$ est singulier.

Cela peut avoir lieu pour plusieurs points, et même pour une infinité. Soit par exemple la série:

$$\sum z^n \rho_n e^{in\varphi(n)}$$

où $n[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$ tend vers o, lorsque $n$ devient infini. Alors

$$|\varphi(n+h) - \varphi(n)| < \frac{1}{n} \sum_{\nu=1}^{h} |\varphi(n+\nu) - \varphi(n+\nu-1)| (n+\nu-1)$$

tend vers o, si $\frac{h}{n}$ reste fini; et $\omega_{m+\nu+1} - \omega_{m+\nu} - \varphi(m)$ tend vers o, pourvu que $\left|\frac{\nu}{m}\right|$ reste fini.

A toute suite de valeurs de $n$ telles que $\frac{1}{n} L\rho_n$ tende vers o, correspondent des arcs $\varphi(n) - 2k\pi$, dont les limites donnent des points singuliers. Et si ces limites forment une suite continue, on obtiendra des arcs du cercle de convergence qui seront des coupures. Considérons, par exemple, la série:

$$\sum z^n \rho_n e^{in(Ln)^\theta}, \qquad 0 < \theta < 1,$$

$$n[\overline{L(n+1)}^\theta - \overline{Ln}^\theta] < n\left[\left(Ln + \frac{1}{n}\right)^\theta - (Ln)^\theta\right] < \frac{\theta}{(Ln)^{1-\theta}}.$$

Soit $k$ un nombre entier qui augmente indéfiniment, pendant que $\varepsilon$ tend vers o, mais aussi lentement que l'on voudra, (par exemple $\varepsilon = \frac{1}{Lk}$), si

$n$ reste compris entre $e^{(\alpha+2k\pi)^{\frac{1}{\theta}}-\varepsilon k^{\frac{1}{\theta}-1}}$ et $e^{(\alpha+2k\pi)^{\frac{1}{\theta}}+\varepsilon k^{\frac{1}{\theta}-1}}$, $(Ln)^{\theta} - 2k\pi$ a pour limite $\alpha$. Il en résulte que la circonférence de convergence est une coupure, pourvu que $\frac{1}{n} L\rho_n$ tende vers 0, au moins pour une suite de valeurs de $n$ correspondant à chaque valeur de $\alpha$, ce qui a lieu, par exemple, si $\frac{1}{n} L\rho_n$ tend vers 0 pour des valeurs $n_\nu$ telles que $L\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}(Ln_\nu)^{\theta-1}$ tende vers 0; et en particulier si $\frac{n_{\nu+1}}{n_\nu}$ reste fini.

Pour la série $\sum z^n \rho_n e^{i\alpha n \sin\varphi(n)}$ où $n[\varphi(n+1) - \varphi(n)]$ tend vers 0, $\omega_{n+1} - \omega_n$ a la même limite que $\alpha \sin\varphi(n)$, qui reste compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$.

Ainsi la série $\sum z^n \rho_n e^{i\alpha n \sin(Ln)^{\theta}}$, où $\rho_n$ remplit les conditions précédentes, a comme coupure l'arc compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$. Mais il résulte du théorème général, que, si les modules $\rho_n$ sont choisis arbitrairement, tout le cercle de convergence est une coupure. Il existe cependant des cas assez étendus où nous pourrons démontrer que la coupure est limitée à l'arc $\pm\alpha$.

6. Si $\sqrt[n]{\frac{|f_n(t)|}{\underline{|n}}}$ a une limite supérieure plus petite que $\frac{1}{1-t}$, le point $z = 1$ n'est pas singulier. Mais

$$\frac{|f^n(t)|}{\underline{|n}} < |\varphi_m(t)|\, t^p \frac{\underline{|(n+p)}}{\underline{|n}\,\underline{|p}} + 2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n.$$

Pour chaque valeur de $m$ choisissons $p$ de façon que, $\frac{m}{p}$ tendant toujours vers $t$, $m - p$ prenne toutes les valeurs entières. Cela a lieu, par exemple, si $mt \geqq p > mt - 1$. Alors, si $\sqrt[m]{|\varphi_m(t)|}$ a une limite supérieure plus petite que 1, on peut choisir $\theta' > 0$ puis $m$ assez grand pour que $|\varphi_m(t)| < (1-\theta')^m$ et, pour toute valeur assez grande de $n$, on aura

$$\left|\frac{f^n(t)}{\underline{|n}}\right| < (1-\theta')^m \left(\frac{1+\varepsilon}{1-t}\right)^n + 2\left(\frac{1-\theta}{1-t}\right)^n$$

il en résulte que $\sqrt[n]{\left|\frac{f\,(t)}{\underline{|n}}\right|}$ a une limite supérieure plus petite que $\frac{1}{1-t}$; par suite:

*Théorème.* Si, $t$ et $\omega$ restant fixe, on forme $\varphi_m(te^{\omega i})$ en choisissant $p$ de façon que $\frac{p}{m}$ tende vers $t$, $m-p$ prenant toutes les valeurs entières, et si $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{\omega i})|}$ a une limite supérieure plus petite que 1, pour $m=\infty$, $z=e^{\omega i}$ n'est pas un point singulier de $f(z)$.

Pour appliquer ce théorème, nous allons étudier l'ordre de grandeur de $\varphi_m(te^{\omega i})$ dans des cas particuliers.

Soit

$$f(z) = (1-z)^{-h-1}\,|\underline{h} = \sum \frac{|\underline{(h+n)}}{|\underline{n}} z^n$$

on a

$$f^n(z) = |\underline{(n+h)}\,(1-z)^{-h-n-1}$$

et

$$\varphi_m(z) = \frac{|\underline{p}}{|\underline{m}} z^{-p} f^n(z) = \frac{|\underline{p}\,|\underline{(n+h)}}{|\underline{m}} z^{-p}(1-z)^{-h-n-1}$$

où

$$a_{m+\nu} = (m+\nu+1)(m+\nu+2)\dots(m+\nu+h).$$

Représentons par $\varphi_{m,h}(z)$ ce que devient $\varphi_m$ lorsque $a_{m+\nu}$ est remplacé par $\nu^h$, $\nu$ variant de $-p$ à $+\infty$; c'est à dire:

$$\varphi_{m,h}(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \nu^h z^\nu \frac{|\underline{(m+\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\nu)}\,|\underline{m}} + \sum_{\nu=1}^{p} (-\nu)^h z^{-\nu} \frac{|\underline{(m-\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p-\nu)}\,|\underline{m}},$$

on a

$$\frac{|\underline{p}\,|\underline{n}}{|\underline{m}} z^{-p}(1-z)^{-n-1} = \varphi_{m,0}$$

$$\frac{|\underline{p}\,|\underline{(n+1)}}{|\underline{m}} z^{-p}(1-z)^{-n-2} = \varphi_{m,1} + (m+1)\varphi_{m,0}$$

et en général

$$\frac{|\underline{p}\,|\underline{(n+h)}}{|\underline{m}} z^{-p}(1-z)^{-n-h-1} = \varphi_{m,h} + \varphi_{m,h-1}\Sigma_{h-1} + \dots + \varphi_{m,0}\Sigma_0$$

où $\Sigma_0 \Sigma_1 \dots \Sigma_{h-1}$ représentent les coefficients de $\nu^0, \nu, \nu^2, \dots, \nu^{h-1}$ dans

le développement de $(\nu + m + 1)(\nu + m + 2)\ldots(\nu + m + h)$. Et l'on en déduit

$$\varphi_{m,h} = \frac{|\underline{p}\,|\underline{n}}{|\underline{m}} z^{-p}(1 - z)^{-n-h-1}\psi_h(z)$$

où $\psi_h$ est un polynôme en $z$ de degré $h$. Posons $x = \frac{z}{1-z}$, $(1-z)^{-h}\psi_h(z)$ est un polynôme de degré $h$ en $x$, et en supposant $|z|$ suffisamment petit, on aura

$$(1-z)^{-h}\psi_h(z) = \frac{(1-z)^{n+1}}{|\underline{n}} \sum_{\nu=-p}^{+\infty} \nu^h z^{p+\nu} \frac{|\underline{(m+\nu)}}{|\underline{(p+\nu)}} = \sum_{\nu=-p}^{+\infty} \nu^h \frac{|\underline{(m+\nu)}}{|\underline{(p+\nu)}\,|\underline{n}} x^{\nu+p}(1+x)^{-\nu-p-n-1}$$

$$= (-p)^h - \frac{n+1}{1} x[(-p)^h - (1-p)^h]$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2} x^2[(-p)^h - 2(1-p)^h + (2-p)^h] - \ldots$$

$$+ (-x)^h \frac{(n+1)\ldots(n+h)}{1\,.\,2\ldots h}\left[(-p)^h - \frac{h}{1}(1-p)^h + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}(2-p)^h - \ldots\right],$$

et

$$\psi_h(z) = (z-1)^h p^h + \frac{n+1}{1}(z-1)^{h-1} z[p^h - (p-1)^h]$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1\,.\,2}(z-1)^{h-2} z^2[p^h - 2(p-1)^h + (p-2)^h] + \ldots$$

$$+ \frac{(n+1)\ldots(n+h)}{1\,.\,2\ldots h} z^h\left[p^h - \frac{h}{1}(p-1)^h + \frac{h(h-1)}{1\,.\,2}(p-2)^h - \ldots + (h-p)^h\right].$$

Le dernier coefficient

$$p^h - \frac{h}{1}(p-1)^h + \ldots + (-p+h)^h = p\left[p^{h-1} - \frac{h-1}{1}(p-1)^{h-1} + \ldots\right]$$

$$+ (h-p)\left[(p-1)^{h-1} - \frac{h-1}{1}(p-2)^{h-1} + \ldots\right] = |\underline{h}$$

formule qui se démontre en donnant à $h$ des valeurs entières successives. Et

$$p^h - \frac{\nu}{1}(p-1)^h + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}(p-2)^h - \ldots + (-1)^\nu(p-\nu)^h$$

$$= p\left[p^{h-1} - \frac{\nu}{1}(p-1)^{h-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{1\,.\,2}(p-2)^{h-1} - \ldots\right]$$

$$+ \nu\left[(p-1)^{h-1} - \frac{\nu-1}{1}(p-2)^{h-1} + \frac{(\nu-1)(\nu-2)}{1\,.\,2}(p-3)^{h-1} - \ldots\right]$$

en donnant à $h$ des valeurs croissantes, on en déduit que cette expression est nulle si $\nu > h$, et a une valeur positive plus petite que

$$h(h-1)\ldots(h-\nu+1)p^{h-\nu}$$

si $0 < \nu < h$. Par suite, pour toutes les valeurs $z = te^{\omega i}$, si $0 < t < 1$, on a:

$$|\varphi_h(z)| < \overline{(1+t)p}^h + \frac{n+1}{1} ht\overline{(1+t)p}^{h-1}$$

$$+ \frac{(n+1)(n+2)}{1.2} h(h-1)t^2\overline{(1+t)p}^{h-2} + \ldots + \frac{|\underline{(n+h)}}{|\underline{n}} t^h < [(1+t)p + (n+h)t]^h$$

et

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < \frac{|\underline{p}\,|\underline{n}}{|\underline{m}} t^{-p}|1-te^{\omega i}|^{-1-n-h}[(1+t)p+(n+h)t]^h$$

$\sqrt[m]{\frac{|\underline{p}\,|\underline{n}}{|\underline{m}} t^{-p}(1-t)^{-n-1}}$ tend vers 1, $\left|\frac{1-t}{1-te^{\omega i}}\right|^{\frac{n}{m}}$ a pour limite

$$\left|\frac{(1-t)^2}{(1-t)^2+4t\sin^2\frac{\omega}{2}}\right|^{\frac{1-t}{2}}.$$

Soit $\alpha$ un arc fixe aussi petit que l'on voudra, supposons que $\omega$ ne prenne que des valeurs comprises entre $\alpha$ et $2\pi-\alpha$, et soit $\theta$ une quantité positive fixe plus petite que $1-\left(\frac{(1-t)^2}{1+t^2-2t\cos\alpha}\right)^{\frac{1-t}{2}}$. Pourvu que $m$ soit assez grand, on aura

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1-\theta)^m\left(\frac{(1+t)p+(n+h)t}{1-t}\right)^h$$

et si l'on suppose $mt-1 < p \leqq mt$

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1-\theta)^m\left(t\frac{2m+h}{1-t}\right)^h.$$

Si, dans $\varphi_{m,h}$ on ne conserve que les termes où $|\nu| < \lambda m$, soit $\mu$ le plus petit nombre entier supérieur à $\lambda m$; on supprime des termes dont la somme a un module plus petit que

$$\sum_{\nu=\mu}^{p} \nu^h t^{-\nu}\frac{|\underline{(m-\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p-\nu)}\,|\underline{m}} + \sum_{\nu=\mu}^{\infty} \nu^h t^{\nu}\frac{|\underline{(m+\nu)}\,|\underline{p}}{|\underline{(p+\nu)}\,|\underline{m}}.$$

Si $\nu > \frac{h+mt}{1-t}$, le rapport de deux termes consécutifs est

$$\left(\frac{\nu}{\nu-1}\right)^h \frac{m+\nu}{p+\nu} t < \frac{\nu}{\nu-h} t \frac{m+\nu}{p+\nu} < \frac{h+mt}{h+mt+p(1-t)}.$$

Il en résulte que la somme des termes supprimés est plus petite que

$$p^h t^{-\mu} \frac{|(m-\mu)\,|p}{|(p-\mu)\,|m} p + t^\mu \frac{|(m+\mu)\,|p}{|(p+\mu)\,|m} \left(\frac{h+mt}{1-t}\right)^h \left[\frac{h+mt}{1-t} + \frac{h+mt+p(1-t)}{p(1-t)}\right]$$

$$< ep^{h+1} \sqrt{\frac{m-\mu}{m} \frac{p}{p-\mu}} \left(\frac{p}{p-\mu}\right)^p \left(\frac{m-\mu}{m}\right)^m \left(\frac{p-\mu}{(m-\mu)t}\right)^\mu$$

$$+ e\sqrt{\frac{m+\mu}{m} \frac{p}{p+\mu}} \left(\frac{m+\mu}{p+\mu} t\right)^\mu \left(\frac{m+\mu}{m}\right)^m \left(\frac{p}{p+\mu}\right)^p \left(\frac{h+mt}{1-t}\right)^{h+1} \left(1 + \frac{2-t}{p}\right).$$

Mais

$$\frac{\mu}{m} L\left(\frac{m+\mu}{p+\mu} t\right) + L\frac{m+\mu}{m} + \frac{p}{m} L\frac{p}{p+\mu}$$

a pour limite $(1+\lambda)L(1+\lambda) - (t+\lambda)L\left(1+\frac{\lambda}{t}\right) < 0$ et il existe une quantité fixe $\theta$ telle que

$$\left(\frac{m+\mu}{p+\mu} t\right)^\mu \left(\frac{m+\mu}{m}\right)^m \left(\frac{p}{p+\mu}\right)^p < (1-\theta)^m$$

il en est de même pour $\left(\frac{m-\mu}{m}\right)^m \left(\frac{p}{p-\mu}\right)^p \left(\frac{p-\mu}{(m-\mu)t}\right)^\mu$ et l'on peut trouver une quantité fixe $\theta$ telle que pour toute valeur assez grande de $m$, l'ensemble des termes que nous supprimons ait une somme plus petite que $(1-\theta)^m\left[(mt)^h + \left(\frac{h+mt}{1-t}\right)^{h+1}\right]$, $\theta$ étant très petit en même temps que $\lambda$; si dans $\varphi_{m,h}$ on suppose $|\nu| < \lambda m$, $\lambda$, $t$ et $\omega$ restant fixes, $\omega \gtrless 0$, on peut trouver une quantité $\theta$ telle que, pour toute valeur de $m$ dépassant un nombre déterminé

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1-\theta)^m \left[\left(t\frac{2m+h}{1-t}\right)^h + \left(\frac{mt+h}{1-t}\right)^{h+1}\right].$$

Si l'on suppose $h < \lambda m$, on peut écrire de même

$$|\varphi_{m,h}(te^{\omega i})| < (1-\theta)^m \left(t\frac{2+\lambda}{1-t} m\right)^h.$$

7. Supposons maintenant que la série $f(z)$ soit telle qu'à chaque valeur de $m$ corresponde un arc $\alpha$, $a_{m+\nu}e^{\nu\alpha i}$ étant une fonction continue de $\nu$, développable en série convergente, pourvu que $|\lambda| < Rm$. C'est à dire que tous les coefficients de $\varphi_m$ pourront se mettre sous la forme

$$a_{m+\nu} = e^{-\nu\alpha i}\sum_{h=0}^{\infty} A_h\left(\frac{\nu}{m}\right)^h = e^{-\nu\alpha i}F\left(\frac{\nu}{m}\right)$$

la série $F$ étant supposée convergente si $\left|\frac{\nu}{m}\right| \leqq R$, cette quantité $R$ restant fixe. Soit $M$ le maximum du module de $F(Re^{\omega i})$, on a

$$2\pi i A_h = \int_0^{2\pi} \frac{F(Re^{\omega i})}{R^h e^{h\omega i}} i d\omega, \qquad |A_h| < \frac{M}{R^h}.$$

Soit $z = te^{(\alpha+\omega)i}$, $\omega$ étant arbitraire, mais sans être nul, de façon que $|\omega|$ reste toujours supérieur à un arc fixe. On a alors

$$\varphi_m(te^{(\alpha+\omega)i}) = \sum_{h=0}^{\infty} \frac{A_h}{m^h}\varphi_{m,h}(te^{\omega i})$$

Si l'on sépare les termes pour lesquels $h > \lambda m$, en supposant $\lambda < R$, on a:

$$\left|\sum_{h>\lambda m} A_h\left(\frac{\nu}{m}\right)^h\right| < 2\pi M\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\lambda m}\frac{R}{R-\lambda}$$

et

$$|\varphi_m(te^{(\alpha+\omega)i})| < (1-\theta)^m M \sum_{h<\lambda m}\left(\frac{t}{R}\,\frac{2+\lambda}{1-t}\right)^h$$
$$+ M\left(\frac{\lambda}{R}\right)^{\lambda m}\frac{R}{R-\lambda}\,\frac{\underline{|p}\,\underline{|n}}{\underline{|m}}\,\frac{t^{-p}}{(1-t)^{n+1}}.$$

Si $t$ et $\lambda$ sont assez petits, et $m$ assez grand, cette expression peut se mettre sous la forme $(1-\theta)^m M$, où $\theta$ reste supérieure à une quantité fixe, quand $m$ devient infini. De sorte que, si $\frac{LM}{m}$ tend vers 0, $\sqrt[m]{|\varphi_m(te^{(\alpha+\omega)i})|}$ aura une limite supérieure plus petite que 1. Et il n'y a pas d'autres points singuliers que ceux provenant des limites des arcs $\alpha$. Si un arc de la circonférence de convergence est tel que, pourvu que $m$ dépasse

un nombre déterminé, $\alpha$ ne se trouve jamais sur cet arc, il ne contiendra aucun point singulier.

Considérons la série

$$\Sigma b_n e^{in\varphi(n)} z^n$$

où $\varphi(n)$ est réel, $\varphi(z)$ étant une fonction analytique de la variable $z$, qui n'a aucun point singulier à distance finie, pour les valeurs $z = \rho e^{\omega i}$ où $|\omega|$ reste plus petit qu'une quantité donnée, et où $\rho$ reste plus grand qu'un module déterminé. Supposons en outre que $\varphi(n + n\rho e^{\omega i}) - \varphi(n)$ tende vers o, lorsque $n$ augmente indéfiniment quelque soit $\omega$, pourvu que $\rho < \lambda$. Et soit $b_n = \psi(n)$, $\psi(z)$ étant une fonction analytique, qui n'a aucun point singulier à distance finie, pour les valeurs $z = \rho e^{\omega i}$ où $|\omega|$ et $\frac{1}{\rho}$ restent plus petits que des quantités données, $\frac{1}{R} L |\psi(Re^{\omega i})|$ tendant vers o, lorsque $R$ devient infini, pour toutes les valeurs de $\omega$ telles que $|\omega|$ ne dépasse pas un arc donné. Alors

$$a_{m+\nu} e^{-i\nu\varphi(m)} = e^{im\varphi(m)} . \psi(m + \nu) . e^{i(m+\nu)[\varphi(m+\nu) - \varphi(m)]}$$

pourra se développer suivant les puissances de $\nu$, si $\left|\frac{\nu}{m}\right| < \lambda$, pourvu que $\lambda$ soit choisi assez petit. Et, si $\left|\frac{\nu}{m}\right| < \lambda$

$$\frac{LM}{m} < \frac{L|\psi(m+\nu)|}{m} + \frac{|m+\nu|}{m} |\varphi(m+\nu) - \varphi(m)|$$

qui tend vers o.

Il ne peut donc y avoir, sur la circonférence de convergence, aucun point singulier en dehors de ceux donnés par les limites de $e^{-i\varphi(n)}$.

Si $\frac{1}{n} L |b_n|$ tend vers o, pour toutes les valeurs infinies de $n$, il résulte du théorème général, démontré au n° 3, que l'on obtiendra les points singuliers de la circonférence de convergence en cherchant les limites de $e^{-i\varphi(n)}$, pour $n = \infty$. Si pour une suite de valeurs de $n$, $\varphi(n) - 2k\pi$ tend vers $\alpha$, $e^{-\alpha i}$ est un point singulier de la série.

Par exemple la série

$$\Sigma \psi(n) z^n e^{ian \sin (Ln)^\theta}$$

où $0 < \alpha < \pi$, $0 < \theta < 1$, $\psi(n)$ étant une fraction rationnelle, où même une fonction algébrique continue de $n$, admet comme coupure l'arc compris entre $-\alpha$ et $+\alpha$, et n'a pas d'autres points singuliers sur la circonférence de convergence.

8. Si une série contient des termes tels que $\frac{L|a_n|}{n}$ ait une limite supérieure plus petite que $1$, on peut les supprimer sans changer les points singuliers situés sur la circonférence de rayon $1$. Supposons la suite des indices $m+\nu$ de $\varphi_m$ ($\nu$ restant compris entre $-\lambda m$ et $+\lambda m$) divisée en parties égales successivement à $h_1, h_2, \ldots, h_n$, telles que parmi $h_\nu$ termes consécutifs d'un groupe, il n'en reste que $p_\nu$, les $h_\nu - p_\nu$ autres ayant été supprimés; et soit $\alpha_m$ le plus grand des rapports $\frac{p_1}{h_1}, \frac{p_2}{h_2}, \ldots, \frac{p_n}{h_n}$, toutes les quantités $\frac{h}{m}$ tendant vers $0$. Soit une suite de valeurs de $m$ telles que $\frac{L|a_m|}{m}$ tende vers $0$, et $\alpha$ la limite inférieure de $\alpha_m$ pour cette suite. En appliquant à la série $\Sigma a_n z^n e^{n\omega i}$ le théorème du n° 4, on voit qu'elle a un point singulier sur l'arc $\pm\alpha\pi$, et la série $\Sigma a_n z^n$ a un point singulier sur l'arc compris entre $\omega - \alpha\pi$ et $\omega + \alpha\pi$, c'est à dire sur tout arc de la circonférence de convergence égal à $2\alpha\pi$.

Si entre $a_{m \pm \lambda m}$ il ne reste que $q$ termes, $\frac{q}{m}$ tendant vers $0$ en même temps que $\frac{L|a_m|}{m}$, le théorème du n° 5 montre de même que tous les points de la circonférence de convergence sont singuliers.

Si $\frac{q}{m}$ a pour limite inférieure $0$, considérons les termes $a_{m+\nu}$ pour des valeurs de $m$ telles que $\frac{q}{m}$ tende vers $0$, $\nu$ restant compris entre $-\lambda' m$ et $+\lambda' m$ $(\lambda' < \lambda)$. Si $\frac{L|a_{m+\nu}|}{m}$ a, pour cette suite de termes, $0$ comme limite supérieure, pour $m = \infty$, le cercle de convergence est une coupure, car on peut remplacer $\lambda$ par $\lambda - \lambda'$, et il existera des termes tels que $\frac{L|a_{m+\nu}|}{m+\nu}$ et $\frac{q}{m}$ tendent vers $0$. Si au contraire $\frac{L|a_{m+\nu}|}{m}$ a, pour tous ces termes, une limite supérieure plus petite que $0$, on peut les supprimer sans changer les points singuliers de la circonférence de convergence.

Mais cela n'indique rien sur le nombre des points singuliers, ainsi que le montre l'exemple suivant:

$$f(z) = \sum z^n \psi(n) . e^{n[-1+\cos(Ln)^\theta]}$$

$0 < \theta < 1$, $\psi(z)$ remplissant les mêmes conditions que dans les exemples précédents, et pouvant être une fonction rationnelle ou algébrique. $a_{m+\nu}$ est alors développable suivant les puissances de $\nu$ pourvu que $\left|\frac{\nu}{m}\right| < \lambda$, et $\frac{LM}{m}$ a pour limite supérieure 0, de sorte que cette fonction n'a qu'un point singulier, $z = 1$, sur la circonférence de convergence. Mais si $n$ reste compris entre $e^{(2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$ et $e^{(2k\pi+2\pi-\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$ où le nombre entier $k$ augmente indéfiniment, $\frac{L|a_n|}{n}$ a pour limite supérieure, pour $n = \infty$, $-1 + \cos\alpha$, et l'on peut supprimer tous ces termes sans que la série ait, sur la circonférence de convergence, d'autre point singulier que $z = 1$. Il ne reste alors que les termes pour lesquels $n$ est compris entre $e^{(2k\pi-\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$ et $e^{(2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}}}$. Mais

$$e^{(2k\pi+2\pi-\alpha)^{\frac{1}{\theta}} - (2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}}} > e^{2\frac{\pi-\alpha}{\theta}(2k\pi+\alpha)^{\frac{1}{\theta}-1}}$$

augmente indéfiniment avec $k$. Parmi les groupes de termes consécutifs qui restent on peut donc en supprimer un nombre quelconque, ce qui supprime les fonctions $\varphi_m$ correspondantes et ne change pas les autres. On a ainsi une série, n'ayant sur la circonférence de convergence qu'un seul point singulier, et dans laquelle il peut manquer un nombre quelconque de termes consécutifs, pour $m = \infty$.

Montpellier le 13 mai 1897.

# SUR LES PROPRIÉTÉS DU POTENTIEL ET SUR LES FONCTIONS ABÉLIENNES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

## § 1. *Introduction.*

Une courbe de genre $p$ dépend de $3p-3$ modules; les fonctions $\theta$ à $p$ variables qui dérivent d'une courbe algébrique par le procédé de RIEMANN dépendent donc de $3p-3$ paramètres arbitraires. Les fonctions $\theta$ les plus générales de $p$ variables dépendent de

$$\frac{p(p+1)}{2}$$

paramètres arbitraires. Pour $p=2$ et pour $p=3$, les deux nombres sont égaux et l'on a:

$$3p-3=\frac{p(p+1)}{2}.$$

Pour $p>3$, le premier nombre est toujours plus petit que le second. Il y a donc des fonctions $\theta$ qu'on ne peut obtenir par les procédés de RIEMANN.

Nous arrivons donc à cette conclusion que les fonctions définies par RIEMANN ne sont pas les fonctions les plus générales qui ont $p$ variables et $2p$ périodes. Nous sommes ainsi amenés à nous poser la question suivante:

Toutes les fonctions qui ont $p$ variables et $2p$ périodes peuvent-elles être regardées comme un quotient de fonctions $\theta$?

WEIERSTRASS s'est préoccupé de cette question et est arrivé à démontrer que la réponse doit être affirmative.

Mais sa démonstration est restée longtemps inédite et n'était connue que de quelques-uns de ses élèves.

M. PICARD et moi, abordâmes le même problème en 1883, et publiâmes à ce sujet une note dans les Comptes Rendus (décembre 1883). Nous connaissions le résultat de WEIERSTRASS; mais nous ignorions les procédés par lesquels il y était parvenu.

Quand la démonstration de WEIERSTRASS ayant été enfin imprimée (oeuvres complètes, tome 3) je pus en avoir connaissance, je reconnus la complète identité des deux démonstrations.

La démonstration de M. APPELL est au contraire complètement différente de celle de WEIERSTRASS.

Mais elle se rattache à un problème différent, étroitement apparenté à celui qui nous occupe, et dont je dois d'abord dire quelques mots.

Soit une fonction de plusieurs variables; elle est *méromorphe*, c'est à dire que dans le voisinage d'un point quelconque, elle peut être égalée au quotient de deux séries de puissances, convergentes dans une certaine étendue. Est-elle toujours le quotient de deux fonctions entières, c'est à dire de deux séries de puissances, *toujours* convergentes?

La réponse doit être affirmative. C'est ce que j'ai démontré dans le tome 2 des Acta mathematica.

En s'appuyant sur ce résultat et sur les propriétés de certaines équations aux différences finies, M. APPELL a donné une démonstration entièrement nouvelle du théorème de WEIERSTRASS (Journal de Liouville 1891).

Mais en réflechissant sur la démonstration contenue dans mon mémoire cité plus haut du tome 2 des Acta, jè me suis aperçu qu'il suffit d'y changer peu de chose pour en tirer une troisième démonstration du théorème de WEIERSTRASS, entièrement différente des deux premières.

C'est cette 3^e^ démonstration dont je voudrais faire l'objet du présent mémoire.

Je dois m'appuyer sur les propriétés du potentiel dans l'espace à $n$ dimensions. Ces propriétés sont bien connues et je n'aurai le plus souvent qu'à les rappeler. Mais quelques-unes d'entre elles présentent un

certain intérêt; on me pardonnera si, à l'occasion, j'y insiste un peu plus qu'il n'est nécessaire pour mon sujet.

C'est ainsi que les §§ 4 et 5 pourraient être supprimés sans que la démonstration en souffrît le moins du monde.

J'observerai que la démonstration que je donne ici est plus simple que celle que j'ai donnée dans le tome 2, où j'ai employé un détour inutile, dans la crainte un peu puérile de redémontrer des théorèmes déjà connus.

## § 2. *Fonctions harmoniques.*

Une fonction $V$ de $n$ variables

$$x_1 \,,\, x_2 \,,\, \ldots \,,\, x_n$$

est dite *harmonique* dans un certain domaine:

1°. Si dans ce domaine elle est finie, continue et possède des dérivées des deux premiers ordres.

2°. Si dans ce domaine ses dérivées du second ordre satisfont à l'équation de LAPLACE:

$$\Delta V = \frac{d^2 V}{dx_1^2} + \frac{d^2 V}{dx_2^2} + \ldots + \frac{d^2 V}{dx_n^2} = 0;$$

si le domaine s'étend à l'infini, il faut de plus que la fonction $V$ s'annule à l'infini.

Considérons les $n$ variables $x$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $n$ dimensions; la distance du point mobile $x_1, x_2, \ldots, x_n$, au point fixe $a_1, a_2, \ldots, a_n$ est égale par définition à

$$r = \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2}.$$

On voit aisément que

$$r^{2-n}$$

est une fonction harmonique dans tout l'espace sauf au point

$$x_1 = a_1 \,,\; x_2 = a_2 \,,\; \ldots \,,\; x_n = a_n.$$

Pour $n = 3$, c'est à dire dans l'espace ordinaire; on a

$$r^{2-n} = \frac{1}{r};$$

nous retombons donc sur le potentiel newtonien.

Les propriétés du potentiel newtonien sont bien connues; elles peuvent d'ailleurs en général être étendues facilement au cas de $n$ quelconque.

La première de ces propriétés est le theorème de Green exprimé par l'équation:

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega = \int(V\Delta U - U\Delta V)d\tau;$$

la seconde intégrale est étendue à tous les éléments $d\tau$ d'un volume $T$ et la première à tous les éléments $d\omega$ de la surface $S$ qui limite ce volume.

La dérivée $\frac{dV}{d\nu}$ représente la dérivée »estimée suivant la normale à l'élément $d\omega$», c'est à dire que l'on a:

$$\frac{dV}{d\nu} = l_1\frac{dV}{dx_1} + l_2\frac{dV}{dx_2} + l_3\frac{dV}{dx_3},$$

$l_1$, $l_2$ et $l_3$ étant les cosinus directeurs de l'élément de surface $d\omega$.

Les fonctions $V$ et $U$ doivent être finies et continues, et posséder des dérivées des deux premiers ordres.

**Théorème 1.** Si $V$ et $U$ sont des fonctions harmoniques, il reste

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega = 0.$$

Une autre propriété du potentiel newtonien est la suivante: si un potentiel est dû à des masses attirantes, il est une fonction holomorphe de $x_1$, $x_2$, $x_3$ en tout point situé hors des masses attirantes.

**Théorème 2.** Considérons par exemple une surface attirante; soit $d\omega'$ un élément de cette surface; $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ les coordonnées du centre de

gravité de cet élément; $r$ la distance des deux points $x'_1, x'_2, x'_3$ et $x_1, x_2, x_3$. Le potentiel aura pour expression:

$$V = \int \frac{\delta' d\omega'}{r},$$

$\delta'$ étant une fonction de $x'_1, x'_2, x'_3$; c'est cette fonction que l'on appelle ordinairement la densité superficielle de la matière attirante.

Considérons une sphère:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2$$

ayant pour centre l'origine et supposons que la surface attirante soit tout entière en dehors de cette sphère de sorte que l'on ait:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 > \rho^2.$$

Développons:

$$\frac{1}{r} = [(x'_1 - x_1)^2 + (x'_2 - x_2)^2 + (x'_3 - x_3)]^{-\frac{1}{2}}$$

suivant les puissances de $x_1, x_2, x_3$. Les coefficients du développement seront plus petits que les coefficients correspondants du développement de:

$$\frac{1}{\rho}\left[1 - \sum\left(\frac{2x_k}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right)\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

Le développement est donc uniformément convergent par rapport à $x'_1$, $x'_2, x'_3$ pourvu que:

$$\sum\left(\frac{2|x_k|}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right) < 1,$$

ou

$$\sum\left(1 + \frac{|x_k|}{\rho}\right)^2 < 4$$

ou enfin pourvu que:

$$(1) \qquad |x_1| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \; ; \; |x_2| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right) \; ; \; |x_3| < \rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Plus généralement le développement de

$$\left[\sum_{k=1}^{n}(x'_k - x_k)^2\right]^p$$

suivant les puissances croissantes des $x_k$ a ses coefficients plus petits que ceux du développement de:

$$\rho^{2p}\left[1 - \sum\left(\frac{2x_k}{\rho} + \frac{x_k^2}{\rho^2}\right)\right]^p$$

en posant

$$\rho^2 = \sum x_k'^2.$$

Le développement converge donc uniformément pourvu que:

$$|x_k| < \rho\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right). \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

Soit donc:

$$(2) \qquad \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

le développement de $\frac{1}{r}$ suivant les puissances de $x_1$, $x_2$ et $x_3$. La convergence de ce développement est uniforme, tant par rapport à $x'_1, x'_2, x'_3$ que par rapport à $x_1$, $x_2$, $x_3$ pourvu que ces quantités satisfassent aux inégalités:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \geqq \rho^2,$$

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 \leqq \rho^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon$$

$\varepsilon$ etant une quantité aussi petite que l'on veut.

Les coefficients $A$ sont, bien entendu, des fonctions des $x'_k$.

Il vient alors:

$$(3) \qquad V = \int \frac{\delta' d\omega'}{r} = \sum x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3} \int A \delta' d\omega'.$$

Comme la convergence de la série (2) est uniforme, la série du dernier membre de (3) converge également et représente $V$. Donc le potentiel

$V$ peut être développé en série procédant suivant les puissances de $x_1$, $x_2$, $x_3$ pourvu que les modules de ces quantités soient assez petits.

Pour que ce résultat soit exact, il n'est pas nécessaire que la fonction $\delta'$ soit finie et continue, il suffit que l'intégrale:

$$\int |\delta'| d\omega'$$

existe et soit finie. Par exemple, en un point $Q$ de la surface attirante, la densité $\delta'$ pourra devenir infinie, pourvu que le produit de la densité $\delta'$ au point $M'$ par la distance $M'Q$ tende vers une limite finie quand la distance $M'Q$ tend vers zéro.

En effet, d'après la discussion précédente nous avons:

$$|A| < Bh^{a_1+a_2+a_3}, \qquad h < 1$$

$B$ et $h$ étant deux nombres indépendants des exposants $a$ et des coordonnées $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$. On a donc:

$$\left|\int A\delta' d\omega'\right| < h^{a_1+a_2+a_3} B \int |\delta'| d\omega'$$

ce qui montre que la série (3) converge pourvu que $\int |\delta'| d\omega'$ soit finie.

Par un simple changement d'origine, on démontrerait que $V$ est développable suivant les puissances de $x_1 - a_1$, $x_2 - a_2$, $x_3 - a_3$ pourvu que l'on puisse trouver des nombres $\rho$ et $\varepsilon$ tels que

$$(x'_1 - a_1)^2 + (x'_2 - a_2)^2 + (x'_3 - a_3)^2 \geqq \rho^2,$$

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + (x_3 - a_3)^2 \leqq \rho^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2 - \varepsilon.$$

Or c'est ce qu'on peut toujours faire, pourvu que le point $a_1$, $a_2$, $a_3$ ne soit pas sur la surface attirante.

Le potentiel $V$ est donc une fonction holomorphe dans tout l'espace sauf sur la surface attirante.

En particulier, ce sera une fonction holomorphe en tout point de la sphère:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = \rho^2.$$

Cela ne veut pas dire que la série (3) converge en tous les points de

cette sphère; tout ce que nous avons démontré c'est que la convergence a lieu en tous les points de la sphère concentrique dont le rayon est

$$\rho\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right).$$

Mais la série présente une particularité curieuse; supposons que dans la série (3) on groupe ensemble tous les termes de même degré; chacun de ces groupes formera un polynôme homogène en $x_1$, $x_2$, $x_3$ et satisfaisant à l'équation de LAPLACE; c'est ce qu'on appelle un »polynôme sphérique».

Quand les termes sont ainsi groupés, la série (3) converge en tous les points de la sphère de rayon $\rho$; et en effet la série (2), si l'on convient de grouper ensemble les termes de même degré, converge uniformément dans toute sphère de rayon plus petit que $\rho$.

Je n'insisterai pas davantage sur la démonstration de cette proposition qui est bien connue et qui ne m'est d'ailleurs pas utile pour mon objet.

La condition de convergence absolue de la série (3) est donc

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2$$

si on groupe ensemble les termes de même degré et

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2\left(\frac{2}{\sqrt{3}} - 1\right)^2$$

si on laisse ces termes séparés les uns des autres.

C'est ainsi que la série alternée

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$$

n'est pas absolument convergente, mais qu'elle le devient si on groupe les termes de la manière suivante:

$$\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \ldots.$$

Passons au cas dit de la double couche.

**Théorème 3.** Soient $l'_1$, $l'_2$, $l'_3$ les cosinus directeurs de l'élément de surface $d\omega$; $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ les coordonnées du centre de gravité de cet élément, et $\delta'$ une fonction quelconque de ces coordonnées; soit toujours $r$ la distance des points $x_1$, $x_2$, $x_3$ et $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$. Considérons l'intégrale

$$V = \int \delta' d\omega' \left[ l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} \right].$$

Cette intégrale est ce qu'on appelle le potentiel d'une double couche. Soit encore:

$$x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 \geqq \rho^2$$

soit:

$$(4) \qquad l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} = \sum A x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$$

le développement de l'expression qui figure entre parenthèses sous le signe $\int$ par rapport aux puissances de $x_1$, $x_2$ et $x_3$. Comme $l'_1$, $l'_2$ et $l'_3$ sont limités, nous voyons d'abord que ce développement converge et que la convergence est uniforme tant par rapport aux $x'$ que par rapport aux $x$ pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2 \left( \frac{2}{\sqrt{3}} - 1 \right)^2 - \varepsilon.$$

Par conséquent $V$ peut se développer suivant les puissances de $x_1$, $x_2$, $x_3$ et le développement converge pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2.$$

Donc le potentiel $V$ d'une double couche attirante est une fonction holomorphe dans tout l'espace, sauf sur la double couche attirante elle-même.

Cela resterait vrai, même si $\delta'$ pouvait devenir infini, pourvu que l'intégrale

$$\int |\delta'| d\omega'$$

soit finie.

Enfin si on groupe ensemble les termes de même degré, le développement de $V$ converge absolument pourvu que

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 < \rho^2$$

et chaque terme de ce développement est un polynôme sphérique.

**Théorème 4.** Considérons une surface fermée quelconque $S$.

Soit $V$ une fonction qui soit harmonique à l'intérieur de $S$, sauf sur tous les points d'une certaine courbe singulière $C$.

Soit $\rho$ la plus courte distance du point $x_1, x_2, x_3$ à la courbe singulière $C$. Je suppose que

$$\frac{V}{\log \rho}, \rho \frac{dV}{dx_1}, \rho \frac{dV}{dx_2}, \rho \frac{dV}{dx_3}$$

restent finis quand $\rho$ tend vers zéro et que le point $x_1, x_2, x_3$ se rapproche indéfiniment de la courbe $C$.

Je supposerai que la surface $S$ et la courbe $C$ sont analytiques et qu'elles ne se touchent en aucun point de façon qu'elles se coupent sous un angle fini.

Considérons maintenant le vecteur $F$ dont les composantes sont

$$\frac{dV}{dx_1}, \frac{dV}{dx_2}, \frac{dV}{dx_3}.$$

Soit ensuite $M$ le point $x_1, x_2, x_3$ et $N$ le point de la courbe $C$ qui est le plus rapproché de $M$; la droite $MN$ est par conséquent normale à la courbe $C$ et c'est sa longueur que nous avons appelée plus haut $\rho$.

Soit $\Phi$ la projection du vecteur $F$ sur la droite $MN$.

Je suppose que le produit $\rho\Phi$ tend vers une limite bien déterminée $2\mu$ quand le point $M$ se rapproche indéfiniment du point $N$. Cette limite $2\mu$ est, bien entendu, une fonction de la position du point $N$ sur la courbe $C$; mais elle ne dépend pas de la direction de la droite $MN$ dans le plan normal en $N$ à la courbe $C$.

Nous envisagerons encore un point $P$ intérieur à $S$ et dont les coordonnées s'appelleront $y_1, y_2, y_3$.

Construisons un domaine $D$ défini par les trois conditions suivantes:

1° Les points de ce domaine sont intérieurs à $S$.

2° La distance d'un point de ce domaine à $P$ est plus grande que $\varepsilon$.

3° La distance d'un point de ce domaine à la courbe $C$ est plus grande que $\varepsilon$.

Le domaine $D$ est limité par trois surfaces:

1° par la surface $S$, ou plutôt par la portion $S_1$ de cette surface dont tous les points sont à une distance de $C$ plus grande que $\varepsilon$;

2° par la sphère $\Sigma$ de centre $P$ et de rayon $\varepsilon$;

3° par une surface-canal $K$, enveloppe des sphères de rayon $\varepsilon$ dont le centre est sur $C$. L'équation de cette surface-canal peut s'écrire $\rho = \varepsilon$.

Si la courbe $C$ coupe la surface $S$ en $h$ points, la surface-canal $K$ découpera sur la surface $S$, si $\varepsilon$ est très petit, $h$ petites courbes fermées entourant ces $h$ points. La portion de $S$ située en dehors de ces $h$ petites courbes est celle que nous venons d'appeler $S_1$; la portion de $S$ située à l'intérieur de ces $h$ petites courbes pourra s'appeler $S_2$.

Posons

$$r^2 = (x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2; \qquad U = \frac{1}{r}.$$

Les fonctions $V$ et $U$ sont harmoniques dans le domaine $D$ et le théorème de Green nous donne:

$$\int \left( V \frac{dU}{d\nu} - U \frac{dV}{d\nu} \right) d\omega = 0.$$

Les intégrales doivent être étendues à toutes les surfaces qui limitent le domaine $D$, c'est à dire aux surfaces $S_1$, $\Sigma$ et $K$; nous aurons donc:

$$\int_{S_1} + \int_{\Sigma} + \int_{K} = 0.$$

Faisons maintenant tendre $\varepsilon$ vers 0 et voyons vers quelle limite tendra chacune de ces trois intégrales.

Occupons-nous d'abord de $\int_{S_1}$. Je dis que cette intégrale tend vers une limite finie et déterminée que l'on peut considérer, d'après les conventions habituelles, comme la définition de l'intégrale $\int_{S}$ étendue à la surface $S$ tout entière.

Il suffit pour cela de montrer que l'intégrale

$$\int_S \left| V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu} \right| d\omega$$

est finie; la fonction sous le signe $\int$ devient infinie aux $h$ points où la courbe $C$ coupe la surface $S$; mais comme il s'agit d'une intégrale double, il suffit, pour que l'intégrale soit finie, qu'en tout point $M$, voisin de l'un de ces $h$ points que j'appelle $Q$, la fonction sous le signe $\int$ soit au plus de l'ordre de l'inverse de la distance $MQ$, ou ce qui revient au même de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$.

Or $U$ et $\frac{dU}{d\nu}$ sont finis, $V$ est de l'ordre de $\log\rho$ et $\frac{dV}{d\nu}$ de l'ordre de $\frac{1}{\rho}$. La condition est donc remplie.

Pour la même raison

$$\int_S |V| d\omega, \qquad \int_S \left| \frac{dV}{d\nu} \right| d\omega$$

sont finies. Donc d'après un théorème démontré plus haut l'intégrale

$$\int_S \left( V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu} \right) d\omega = \int V\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\omega - \int \frac{dV}{d\nu}\frac{d\omega}{r}$$

est une fonction holomorphe de $y_1, y_2, y_3$ pourvu que le point $y_1, y_2, y_3$ soit à l'intérieur de $S$.

En effet l'intégrale

$$\int V\frac{d\frac{1}{r}}{d\nu} d\omega$$

n'est autre chose que le potentiel de double couche envisagé plus haut

$$\int \delta d\omega' \left[ l'_1 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_1} + l'_2 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_2} + l'_3 \frac{d\frac{1}{r}}{dx_3} \right];$$

les notations seules sont changées, on passe de la seconde intégrale à la première en changeant $x_1, x_2, x_3$ en $y_1, y_2, y_3$; $x'_1, x'_2, x'_3$ en $x_1, x_2, x_3$; $d\omega'$ en $d\omega$; $\delta'$ en $V$.

De même l'intégrale

$$\int \frac{dV}{d\nu} \frac{d\omega}{r}$$

n'est autre chose que l'intégrale

$$\int \delta' \frac{d\omega'}{r}$$

qui représente le potentiel d'une surface attirante. Il n'y a qu'un changement de notations et l'on passe de l'une à l'autre en changeant les $x$ en $y$, les $x'$ en $x$, $d\omega'$ en $d\omega$, $\delta'$ en $\frac{dV}{d\nu}$.

Voici donc un premier résultat: *la limite pour* $\varepsilon = 0$ *de l'intégrale* $\int_{S_1}$ *est une fonction holomorphe des* $y$.

Passons à l'intégrale $\int_{\Sigma}$; la surface de la sphère est $4\pi\varepsilon^2$. $V$ et $\frac{dV}{d\nu}$ sont finis; $U$ est égal à $\frac{1}{\varepsilon}$ et $\frac{dU}{d\nu}$ à $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

Donc

$$\int \frac{dV}{d\nu} \frac{d\omega}{r}$$

est de l'ordre de $\varepsilon$ et tend vers 0; et d'autre part

$$\lim \int V \frac{dU}{d\nu} d\omega = \lim \int V \frac{d\omega}{\varepsilon^2} = 4\pi V(y_1, y_2, y_3)$$

c'est à dire que

$$\lim \int_{\Sigma} = 4\pi V(y_1, y_2, y_3).$$

Considérons enfin l'intégrale $\int_K$.

La surface-canal $K$ est engendrée pas des circonférences de rayon $\varepsilon$ dont le plan est normal à la courbe $C$. Soient $Q$ et $Q'$ deux points infiniment voisins de la courbe $C$; considérons les deux circonférences

dont le plan est normal à $C$ aux deux points $Q$ et $Q'$. La portion de la surface comprise entre ces deux circonférences sera ce que j'appellerai un »segment» de la surface.

Si l'arc $QQ'$ est égal à $ds$, l'aire du segment correspondant sera $2\pi\varepsilon ds$. Considérons notre intégrale

$$\int\left(V\frac{dU}{d\nu}-U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega$$

et étendons-la à ce segment.

$U$ et $\frac{dU}{d\nu}$ sont finies; $V$ est de l'ordre de $\log\varepsilon$ et $\frac{dV}{d\nu}$ de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$. Alors l'intégrale

$$\int V\frac{dU}{d\nu}d\omega$$

est de l'ordre de $\varepsilon\log\varepsilon$ et tend vers 0. L'intégrale:

$$\int\frac{dV}{d\nu}Ud\omega=\int\frac{dV}{d\nu}\frac{d\omega}{r}$$

tend au contraire vers une limite finie; qui est égale au produit:

$$2\pi ds.\lim\left(\varepsilon\frac{dV}{d\nu}\right)\lim\frac{1}{r}.$$

La limite de $\varepsilon\frac{dV}{d\nu}$ est ce que j'ai appelé plus haut $2\mu$. La limite de $\frac{1}{r}$ est l'inverse de la distance du point $P$ au centre de gravité de l'élément $ds$.

L'intégrale devrait être étendue à la portion $K_1$ de la surface $K$ qui est à l'intérieur de $S$; considérons l'intégrale

$$\int\limits_{K_2}$$

étendue à la portion $K_2$ de la surface $K$ engendrée par les circonférences de rayon $\varepsilon$ dont le centre est sur la partie de $C$ intérieure à $S$.

Les deux surfaces $K_1$ et $K_2$ ne coïncident pas exactement parce qu'il peut y avoir des circonférences de rayon $\varepsilon$ qui ne sont que partiellement intérieures à $S$, ou encore des circonférences qui sont intérieures à $S$ mais dont le centre est extérieur à $S$, ou inversement.

Mais si $\varepsilon$ est très-petit, l'aire totale des parties de $K_1$ qui n'appartiennent pas à $K_2$, ou celle des parties de $K_2$ qui n'appartiennent pas à $K_1$, est de l'ordre de $\varepsilon^2$. Et, comme la fonction sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$, la différence

$$\int_{K_1} - \int_{K_2}$$

est de l'ordre de $\varepsilon$ et tend vers 0.

Quant à l'intégrale $\int_{K_2}$, elle est la somme des intégrales relatives aux segments qui correspondent à la partie de $C$ intérieure à $S$. Elle tend donc vers la limite:

$$-4\pi \int \frac{\mu ds}{r}$$

où $r$ désigne la distance du point $P$ à l'élément $ds$.

C'est, au facteur $-4\pi$ près, le potentiel par rapport au point $P$ de la ligne attirante $C$, la densité linéaire étant égale à $\mu$.

Ce potentiel multiplié par $-4\pi$ est donc la limite vers laquelle tend notre intégrale $\int_K$.

Donc en passant à la limite, notre équation

$$\int_{S_1} + \int_{\Sigma} + \int_{K} = 0$$

nous apprend que $V(y_1, y_2, y_3)$ est égal au potentiel de cette ligne attirante plus une fonction des $y$, holomorphe à l'intérieur de $S$.

Nous pouvons donc énoncer le résultat suivant:

**Théorème 4.** *La fonction $V$ satisfaisant aux conditions énoncées plus haut est égale à l'intérieur de $S$ à une fonction holomorphe plus le potentiel d'une ligne attirante;* la ligne attirante est $C$ et la densité linéaire est $\mu$.

Si en particulier on suppose que $V$ est harmonique dans toute la région intérieure à $S$, $\mu$ sera nul; et $V$ sera une fonction holomorphe en tout point intérieur à $S$.

D'où cette conséquence.

Toute fonction harmonique dans un domaine est holomorphe dans ce domaine.

J'ai insisté un peu sur cette démonstration, parce que c'est le modèle sur lequel sera calquée plus loin la démonstration d'un théorème important.

Tous ces résultats s'étendent facilement au cas d'un nombre quelconque de variables; et d'abord le théorème de Green.

Considérons dans l'espace à $n$ dimensions un domaine $D$ et la variété fermée à $n-1$ dimensions $S$ qui limite ce domaine.

Considérons une portion de cette variété assez petite pour que ses équations puissent se mettre sous la forme suivante:

$$x_i = \varphi_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}). \qquad {\scriptstyle (i=1,2,\ldots,n)}$$

Les $u$ sont des variables auxiliaires et les $\varphi$ sont des séries procédant suivant les puissances des $u$.

Considérons le jacobien ou déterminant fonctionnel de

$$\varphi_1 + \alpha_1\xi, \ \varphi_2 + \alpha_2\xi, \ \ldots, \ \varphi_n + \alpha_n\xi$$

par rapport à

$$u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}, \xi.$$

Ce jacobien étant évidemment une fonction linéaire des indéterminées $\alpha$, je l'appelle:

$$D_1\alpha_1 + D_2\alpha_2 + \ldots + D_n\alpha_n.$$

Soit ensuite:

$$D_0 = \sqrt{D_1^2 + D_2^2 + \ldots + D_n^2}.$$

L'intégrale $n-1^{\text{ple}}$

$$\int D_0 du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$

étendue à une portion $\Pi$ de la variété $S$ s'appellera *l'aire* de cette portion $\Pi$; les intégrales $n-1^{\text{ples}}$

$$\int D_1 du_1 du_2 \ldots du_{n-1}, \ldots, \int D_n du_1 du_2 \ldots du_{n-1}$$

s'appelleront les projections de cette aire sur les espaces coordonnés. Si la portion $\Pi$ est infiniment petite, l'intégrale

$$\int D_0 du_1 \ldots du_{n-1}$$

pourra s'appeler l'aire d'un élément de la variété $S$ et se représenter par $d\omega$.

Les rapports

$$\frac{D_1}{D_0}, \frac{D_2}{D_0}, \ldots, \frac{D_n}{D_0}$$

seront les cosinus directeurs de l'élément $d\omega$.

Nous poserons alors, $\varphi$ étant une fonction quelconque des $x$:

$$\frac{d\varphi}{d\nu} = \frac{D_1}{D_0}\frac{d\varphi}{dx_1} + \frac{D_2}{D_0}\frac{d\varphi}{dx_2} + \ldots + \frac{D_n}{D_0}\frac{d\varphi}{dx_n}.$$

Ces définitions posées, le théorème de GREEN se généralise immédiatement et l'on a:

**Théorème 1 généralisé.** Si $V$ et $U$ sont deux fonctions harmoniques dans le domaine $D$, on a:

$$\int_S \left(V\frac{dU}{d\nu} - U\frac{dV}{d\nu}\right)d\omega = 0.$$

On trouve de même:

**Théorème 2 généralisé.** Considérons l'intégrale

$$V = \int \frac{\delta' \, d\omega'}{r^{n-2}}$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ d'une variable $S$ à $n - 1$ dimensions; soient

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$$

les coordonnées de l'élément $d\omega'$; $r$ la distance des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n$; $\delta'$ une fonction quelconque des $x'$ telle que l'intégrale

$$\int |\delta'| \, d\omega'$$

soit finie.

La fonction $V$ sera développable suivant les puissances de $x$ pourvu que

$$\Sigma x'^2 > \rho^2, \qquad \Sigma x^2 < \rho^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)^2.$$

La série converge encore absolument si

$$\Sigma x^2 < \rho^2$$

urvu que l'on ait soin de grouper ense...
gré.

*Corollaire.* La fonction $V$ est holomorphe dans tout l'espace à $n$ limensions sauf pour les points de la variété $S$.

**Théorème 3 généralisé.** Considérons l'intégrale:

$$V = \int \delta' \, d\omega' \frac{d(r^{2-n})}{d\nu'}.$$

Dans cette formule, $\delta'$, $d\omega'$ et $r$ ont même signification que dans le théorème précédent et on pose:

$$\frac{d(r^{2-n})}{d\nu'} = \sum \frac{D'_k}{D'_0} \frac{d(r^{2-n})}{dx'_k},$$

$D'_0$ et $D'_k$ étant les quantités analogues aux $D_0$ et aux $D_k$ définis plus haut qui sont relatives à l'élément $d\omega'$.

La fonction $V$ sera encore développable suivant les puissances des $x$ si:

$$\Sigma x'^2 > \rho^2, \qquad \Sigma x^2 < \rho^2 \left( \sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 2 \right)^2.$$

Si on groupe ensemble les termes de même degré, la convergence est encore absolue pour $\Sigma x^2 < \rho^2$.

*Corollaire.* La fonction $V$ est holomorphe dans tout l'espace à $n$ dimensions sauf pour les points de la variété $S$.

Le théorème 4 est également susceptible de généralisation; je ne m'en occuperai pas pour le moment parce que je me réserve de revenir avec plus de détails sur ce point important. Mais j'aurai peut-être encore besoin de plusieurs propositions qui sont des conséquences des propriétés des fonctions de Green relatives à une hypersphère. Ces propriétés étant bien connues, au moins en ce qui concerne l'espace à trois dimensions, je n'insisterai pas sur la démonstration.

**Théorème 5.** Considérons l'hypersphère:

(1) $$\Sigma x^2 = R^2$$

que j'appellerai $S$. Soit $P$ un point intérieur à l'hypersphère dont le coordonnées seront $y_1, y_2, \ldots, y_p$; nous aurons

$$\Sigma y^2 = \rho^2, \qquad \rho < R.$$

Soit $P'$ le point conjugué de $P$; ses coordonnées seront:

$$y_1\frac{R^2}{\rho^2}\,,\ y_2\frac{R^2}{\rho^2}\,,\ \ldots,\ y_n\frac{R^2}{\rho^2}.$$

Soit $r$ la distance du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ à $P$ et $r'$ sa distance à $P'$ de sorte que

$$r^2=\Sigma(x-y)^2,\qquad r'^2=\sum\left(x-y\frac{R^2}{\rho^2}\right)^2.$$

Lorsque le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est sur l'hypersphère $S$, on a:

$$\frac{r}{r'}=\frac{\rho}{R};$$

considérons alors la fonction:

$$G=\left(\frac{1}{r}\right)^{n-2}-\left(\frac{R}{\rho r'}\right)^{n-2};$$

c'est une fonction harmonique dans tout l'espace à $n$ dimensions sauf aux points $P$ et $P'$; elle s'annule quand le point $x_1, \ldots, x_n$ vient sur $S$.

Considérons une fonction $V$ harmonique à l'intérieur d'une hypersphère plus grande que $S$.

Considérons une hypersphère $\Sigma$ de rayon $\varepsilon$ et de centre $P$ et le domaine $D$ compris entre les deux hypersphères $S$ et $\Sigma$; dans ce domaine les deux fonctions $V$ et $G$ sont harmoniques et le théorème de Green nous donne:

$$\int\left(G\frac{dV}{d\nu}-\frac{dG}{d\nu}V\right)d\omega=0.$$

L'intégration devant être étendue à tous les éléments des deux hypersphères $S$ et $\Sigma$, j'écris:

$$\int_S+\int_\Sigma=0.$$

Quand $\varepsilon$ tend vers 0, la seconde intégrale $\int_\Sigma$ tend vers une limite finie:

$$CV(y_1, y_2, \ldots, y_n);$$

$C$ est une constante numérique, qui est égale à $n-2$ fois l'aire de l'hypersphère de rayon 1.

Quand à la première intégrale, comme $G$ s'annule sur $S$, elle se réduit à:

$$-\int \frac{dG}{d\nu} V d\omega.$$

Ainsi $V(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ est égal à l'intégrale

$$\frac{1}{C}\int \frac{dG}{d\nu} V d\omega.$$

De même, comme la fonction $r^{2-n}$ est aussi harmonique dans tout l'espace sauf au point $P$, on trouverait:

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int \left(\frac{dr^{2-n}}{d\nu} V - r^{2-n}\frac{dV}{d\nu}\right) d\omega.$$

Mais d'après les théorèmes 2 et 3 généralisés, l'intégrale du 2[d] membre est développable suivant les puissances des $y$ pourvu que

$$\Sigma y^2 < R^2\left(\sqrt{1 + \frac{1}{n}} - 1\right)^2.$$

Dans le cas où la fonction $V$ est harmonique dans toute portion finie de l'espace, on peut prendre $R$ aussi grand que l'on veut. Nous arrivons donc au résultat suivant:

*Si la fonction $V$ est harmonique dans toute portion finie de l'espace à $n$ dimensions,* (c'est à dire si elle satisfait partout à l'équation de Laplace $\Delta V = 0$ et possède partout des dérivées du second ordre, mais sans être assujettie à tendre vers 0 quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ s'éloigne indéfiniment) *cette fonction $V$ est développable suivant les puissances des $x$; ce développement est toujours convergent.*

Si on groupe ensemble les termes de même degré, chacun des groupes sera un polynôme homogène qui devra satisfaire à l'équation de Laplace; c'est à dire ce qu'on peut appeler un *polynôme hypersphérique.*

**Théorème 6.** Reprenons la formule

$$V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C}\int \frac{dG}{d\nu} V d\omega.$$

Si $R$ est très grand et $\rho$ fini, $r$ est de l'ordre de $R$ et $r'$ de l'ordre de $R^2$, si le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est sur $S$.

Donc $r^{2-n}$ et $r'^{2-n}$ sont de l'ordre de $R^{2-n}$ et $R^{4-2n}$. Leurs dérivées premières par rapport aux $x$ sont respectivement de l'ordre de $R^{1-n}$ et $R^{2-2n}$; et leurs dérivées secondes sont respectivement de l'ordre de $R^{-n}$ et $R^{-2n}$.

Les dérivées premières de $r^{2-n}$ par rapport aux $y$ sont égales au signe près aux dérivées premières par rapport aux $x$, elles sont donc de l'ordre de $R^{1-n}$.

De même les dérivées secondes de $r^{2-n}$ prises par rapport à l'une des variables $x$ et à l'une des variables $y$, sont égales au signe près aux dérivées secondes prises par rapport à deux variables $x$; elle sont donc de l'ordre de $R^{-n}$.

Supposons ensuite que le point $P$ vienne en $P_1$ et que la distance $PP_1$ soit finie; soit $r_1$ la distance du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ au point $P_1$ et $r'_1$ sa distance au point $P'_1$ conjugué de $P_1$; soit $\rho_1$ la distance du point $P_1$ à l'origine.

L'accroissement

$$r_1^{2-n} - r^{2-n}$$

est du même ordre que les dérivées $\frac{dr^{2-n}}{dy}$ c'est à dire de l'ordre $R^{1-n}$; de même les accroissements

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{dx}$$

seront du même ordre que les dérivées $\frac{d^2r^{2-n}}{dx\,dy}$, c'est à dire de l'ordre de $R^{-n}$.

Si nous observons ensuite que l'on a:

$$\frac{dF}{d\nu} = \sum \frac{x_k}{R} \frac{dF}{dx_k}, \qquad \left|\frac{x_k}{R}\right| < 1;$$

on verra que

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{d\nu}, \quad \frac{dr'^{(2-n)}}{d\nu}, \quad \frac{dr_1'^{(2-n)}}{d\nu},$$

sont du même ordre que

$$\frac{d(r_1^{2-n} - r^{2-n})}{dx}, \quad \frac{dr'^{(2-n)}}{dx}, \quad \frac{dr_1'^{(2-n)}}{dx},$$

c'est à dire respectivement de l'ordre de:

$$R^{-n}, \; R^{2-2n}, \; R^{2-2n}.$$

Nous avons:

$$G = r^{2-n} - \left(\frac{Rr'}{\rho}\right)^{2-n},$$

et nous poserons, de même:

$$G_1 = r_1^{2-n} - \left(\frac{Rr_1'}{\rho_1}\right)^{2-n}$$

et il viendra:

$$\frac{dG}{d\nu} - \frac{dG_1}{d\nu} = \frac{d(r^{2-n} - r_1^{2-n})}{d\nu} - \left(\frac{R}{\rho}\right)^{n-2} \frac{dr'^{(2-n)}}{d\nu} + \left(\frac{R}{\rho_1}\right)^{n-2} \frac{dr_1'^{(2-n)}}{d\nu}.$$

Dans le second membre, le premier terme est de l'ordre de $R^{-n}$ et les deux derniers sont aussi de l'ordre de: $R^{-n}$; donc le premier membre est de l'ordre de $R^{-n}$.

Cela posé, soient $z_1, z_2, \ldots, z_n$ les coordonnées de $P_1$; nous aurons:

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) - V(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \frac{1}{C} \int \left(\frac{dG_1}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu}\right) V d\omega.$$

La fonction $\frac{dG_1}{d\nu} - \frac{dG}{d\nu}$ est de l'ordre de $R^{-n}$; le champ d'intégration est de l'ordre de $R^{n-1}$; *si la fonction V est finie*, l'intégrale du second membre est infiniment petite et l'on a:

$$V(z_1, z_2, \ldots, z_n) = V(y_1, y_2, \ldots, y_n).$$

Comme les deux points $P$ et $P_1$ sont quelconques, cela veut dire que $V$ est une constante.

Nous arrivons donc à cette conséquence:

*Une fonction harmonique dans toute portion finie de l'espace et dont le module est limité se réduit à une constante.*

**Théorème 7.** De là on peut tirer une conséquence importante: Supposons que la fonction $V$ soit harmonique dans toute partie finie de l'espace; qu'elle soit par conséquent susceptible d'être développée en une série toujours convergente de polynômes hypersphériques, qu'elle soit en un mot ce qu'on pourrait appeler une *fonction harmonique entière.*

Supposons de plus qu'elle soit $n$ fois périodique; alors l'espace à $n$ dimensions se trouvera subdivisé en une infinité de »prismatoïdes des périodes» formant un assemblage à la Bravais et à l'intérieur de ces divers prismatoïdes, la fonction reprendra les mêmes valeurs.

Son module est donc limité et elle doit se réduire à une constante; d'où cette conclusion:

*Toute fonction harmonique entière $n$ fois périodique se réduit à une constante.*

C'est aussi une conséquence de ce fait bien connu qu'une fonction harmonique ne peut avoir ni maximum ni minimum.

Je renverrai d'ailleurs pour plus de détails à un mémoire de M. APPELL publié dans les Acta mathematica, tome 4.

## § 3. *Fonctions Biharmoniques.*

Soit $F = V + iW$ une fonction des $n$ variables complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1\,; \qquad z_2 = x_2 + iy_2\,;\ \ldots\,;\ z_n = x_n + iy_n.$$

On aura alors:

$$\frac{dV}{dx_k} = \frac{dW}{dy_k}, \qquad \frac{dV}{dy_k} = -\frac{dW}{dx_k}$$

d'où il suit que l'expression

$$(1) \qquad \sum \left(\frac{dV}{dx_k}dy_k - \frac{dV}{dy_k}dx_k\right)$$

est une différentielle exacte.

Si donc $V$ est la partie réelle d'une fonction $F$, l'expression (1) sera différentielle exacte.

De là nous tirons les équations:

(2)
$$\frac{d^2V}{dx_k^2}+\frac{d^2V}{dy_k^2}=0, \qquad \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q}+\frac{d^2V}{dy_k\,dy_q}=0,$$
$$\frac{d^2V}{dx_k\,dy_q}=\frac{d^2V}{dy_k\,dx_q}.$$

Toute fonction satisfaisant à ces équations (2) et d'ailleurs continue et ayant des dérivées secondes sera dite ***biharmonique***. Des équations (2) on tire aisément:

(3)
$$\Delta V=\sum\left(\frac{d^2V}{dx_k^2}+\frac{d^2V}{dy_k^2}\right)=0.$$

Ainsi toute fonction biharmonique est en même temps une fonction harmonique des $2n$ variables $x$ et $y$.

Si $n=1$, toute fonction harmonique est la partie réelle d'une fonction de variable complexe.

Mais, si $n>1$, il n'en est plus de même et la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction $V$ puisse être regardée comme la partie réelle d'une fonction de variables complexes, c'est que cette fonction $V$ soit biharmonique.

Les équations (2) peuvent encore se mettre sous une autre forme.

Soit
$$u_k=x_k-iy_k$$

et supposons qu'au lieu des $x$ et des $y$, on prenne pour variables les $z$ et les $u$. Alors la condition pour que $V$ soit biharmonique, c'est qu'il soit de la forme:

$$\varphi(z_1\,,\,z_2\,,\,\ldots\,,\,z_n)+\varphi_1(u_1\,,\,u_2\,,\,\ldots\,,\,u_n)$$

de sorte que les équations (2) peuvent être remplacées par les suivantes qu'on en déduit d'ailleurs par un calcul simple:

(2')
$$\frac{d^2V}{dz_k\,du_q}=0$$

où l'indice $k$ peut être égal à $q$. Ces équations sont au nombre de $n^2$.

**Théorème 8.** Quelle est la condition pour qu'on puisse trouver un polynôme $V$ satisfaisant aux $n^2$ équations

$$\frac{d^2V}{dz_k\,du_q} = \Phi_{k.q} \tag{4}$$

où les $\Phi$ sont des polynômes donnés.

Il est clair que les $\Phi$ doivent satisfaire aux relations suivantes:

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi_{k.q}}{dz_m} &= \frac{d\Phi_{m.q}}{dz_k} = \frac{d^3V}{dz_m\,dz_k\,du_q}, \\ \frac{d\Phi_{q.k}}{du_m} &= \frac{d\Phi_{q.m}}{du_k} = \frac{d^3V}{dz_q\,du_k\,du_m}. \end{aligned} \tag{5}$$

L'indice $q$ peut être égal à $k$ ou à $m$; mais ces deux derniers indices doivent être différents, sans quoi les relations se réduiraient à des identités.

Le nombre des relations (5) est donc $n^2(n-1)$.

Les conditions (5) sont évidemment nécessaires, je dis qu'elles sont suffisantes.

En effet supposons d'abord que les $\Phi$ soient des polynômes homogènes de degré $\lambda$ par rapport aux $z$ d'une part et homogènes de degré $\mu$ par rapport aux $u$ d'autre part:

Alors il suffira pour satisfaire aux équations (4) de faire:

$$V = \frac{\Sigma z_k u_q \Phi_{k.q}}{(\lambda+1)(\mu+1)}.$$

Il est aisé de vérifier que cette expression satisfait aux équations (4) si les conditions (5) sont remplies.

Si maintenant les $\Phi$ sont des polynômes quelconques, on n'aura qu'à les décomposer en parties homogènes tant par rapport aux $z$ que par rapport aux $u$.

*Ainsi pour qu'on puisse satisfaire aux équations* (4) *il faut et il suffit que les conditions* (5) *soient remplies.*

Il est clair d'ailleurs que si on peut y satisfaire, on peut le faire d'une infinité de manières puisqu'on peut ajouter à $V$ une fonction biharmonique quelconque sans que les équations (4) cessent d'avoir lieu.

Si on revient aux variables $x$ et $y$ les équations (4) deviennent

$$(4') \qquad \begin{aligned} \frac{d^2V}{dx_k^2} + \frac{d^2V}{dy_k^2} &= F_k, \\ \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q} + \frac{d^2V}{dy_k\,dy_q} &= F_{kq}, \\ \frac{d^2V}{dx_k\,dy_q} - \frac{d^2V}{dx_q\,dy_k} &= F'_{kq}, \end{aligned}$$

les $F$ étant des polynômes donnés en $x$ et $y$, et les conditions (5) deviennent:

$$(5') \qquad \begin{aligned} \frac{dF_{kq}}{dx_m} + \frac{dF'_{kq}}{dy_m} &= \frac{dF_{mq}}{dx_k} + \frac{dF'_{mq}}{dy_k}, \\ \frac{dF_{kq}}{dy_m} - \frac{dF'_{kq}}{dx_m} &= \frac{dF_{mq}}{dy_k} - \frac{dF'_{mq}}{dx_k}. \end{aligned}$$

## § 4. *Potentiel d'une courbe.*

Considérons d'abord une courbe analytique dans l'espace ordinaire à trois dimensions. Soient $x'_1$, $x'_2$, $x'_3$ les coordonnées d'un point de cette courbe et $r$ la distance de ce point au point $x_1$, $x_2$, $x_3$. Le potentiel de cette courbe sera:

$$V = \int \frac{\delta' ds'}{r}$$

où $\delta'$ représente la densité et $ds'$ l'élément d'arc de la courbe. Je veux étudier cette courbe et son potentiel dans le voisinage d'un de ses points $O$. Je prendrai ce point, que je supposerai non singulier, pour origine des coordonnées; je prendrai la tangente en ce point pour axe des $x_1$ et le plan osculateur pour plan des $x_1 x_2$; nous pourrons mettre alors les équations de la courbe sous la forme suivante:

$$x'_1 = \varphi_1(t), \qquad x'_2 = \varphi_2(t), \qquad x'_3 = \varphi_3(t)$$

les $\varphi$ étant des séries ordonnées suivant les puissances de $t$ et s'annulant avec $t$. De plus pour $t = 0$, $\frac{d\varphi_1}{dt}$ ne s'annule pas, mais

$$\frac{d\varphi_2}{dt} = \frac{d\varphi_3}{dt} = \frac{d^2\varphi_3}{dt^2} = 0.$$

Nous aurons d'ailleurs

$$ds' = dt\psi(t),$$

$\psi$ étant une série développée suivant les puissances de $t$, et je supposerai de plus que $\partial'$ est également développable suivant les puissances de $t$.

Cela posé:

$$r^2 = (x_1' - x_1)^2 + (x_2' - x_2)^2 + (x_3' - x_3)^2$$

est développable suivant les puissances de $t$, $x_1$, $x_2$ et $x_3$.

Ecrivons l'équation:

$$r^2 = 0$$

et résolvons-la plus rapport à $t$; cette équation comportera deux solutions:

$$t = \theta_1(x_1, x_2, x_3), \qquad t = \theta_2(x_1, x_2, x_3)$$

qui s'annulent pour $x_1 = x_2 = x_3 = 0$. Ces deux solutions sont imaginaires bien entendu.

Considérons le produit $(t - \theta_1)(t - \theta_2)$ et posons:

$$(t - \theta_1)(t - \theta_2) = t^2 - 2Yt + Z$$

$Y$ et $Z$ seront deux séries procédant suivant les puissances des $x$. De plus on aura

$$r^2 = (t^2 - 2Yt + Z)\theta,$$

$\theta$ étant une série procédant suivant les puissances de $t$, $x_1$, $x_2$, $x_3$ et *ne s'annulant pas pour*

$$t = x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Pour tous ces théorèmes, je renverrai au mémoire de Weierstrass sur les fonctions de plusieurs variables (Oeuvres Complètes, Tome II, page 135 sqq) et au début de ma thèse inaugurale (Paris, Gauthier-Villars, 1879).

On aura donc:

$$V = \int \frac{\partial'\psi}{\sqrt{\theta}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}} = \int \frac{Udt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}},$$

$U$ étant une série développée suivant les puissances de $t$ et des $x$.

Cela posé, nous allons nous proposer de mettre $U$ sous la forme suivante:

$$(1) \qquad U = U_0 + \Phi(t - Y) + \frac{d\Phi}{dt}(t^2 - 2Yt + Z),$$

$U_0$ étant une série développée suivant les puissances des $x$, et $\Phi$ une série développée suivant les puissances des $x$ et de $t$.

Si nous mettons $U$ sous cette forme, nous en déduirons la valeur de $V$, car l'intégrale indéfinie sera

$$U_0 \log[(t - Y) + \sqrt{t^2 - 2Yt + Z}] + \Phi\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}.$$

Si $U$ était un polynôme, il se mettrait sous la forme (1) par un procédé bien connu. Mais $U$ étant une série, il faut démontrer que ce procédé, toujours applicable, conduit à un résultat convergent.

Posons

$$t = Y + \xi, \qquad Y^2 - Z = \eta,$$

l'équation (1) devient:

$$(1') \qquad U = U_0 + \xi\Phi + (\xi^2 - \eta)\frac{d\Phi}{d\xi}.$$

Comme $U$ est développable suivant les puissances de $t$ et des $x$ et $Y$ suivant les puissances des $x$; la fonction $U$ sera développable également suivant les puissances de $\xi$ et des $x$.

D'autre part $\eta$ est développable suivant les puissances de $x$; mais nous ne nous servirons pas de cette propriété et nous traiterons $\eta$ comme une variable indépendante.

En conséquence dans l'équation (1'):

1° $U$ sera une série *donnée* procédant suivant les puissances de $\xi$ et des $x$.

2° $U_0$ sera une série *inconnue* procédant suivant les puissances de $\eta$ et des $x$.

3° $\Phi$ sera une série *inconnue* procédant suivant les puissances de $\xi$, de $\eta$ et des $x$.

Ecrivons alors:

$$U_0 = u_0 + \eta u_1 + \eta^2 u_2 + \ldots,$$
$$\Phi = \Phi_0 + \eta\Phi_1 + \eta^2\Phi_2 + \ldots.$$

Alors l'équation (1') se décompose dans la série d'équations suivantes:

(2')
$$\begin{aligned}
&\xi\Phi_0 + \xi^2\frac{d\Phi_0}{d\xi} + u_0 = U,\\
&\xi\Phi_1 + \xi^2\frac{d\Phi_1}{d\xi} + u_1 = \frac{d\Phi_0}{d\xi},\\
&\xi\Phi_2 + \xi^2\frac{d\Phi_2}{d\xi} + u_2 = \frac{d\Phi_1}{d\xi},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Nous sommes ainsi conduits à envisager l'équation:

$$\xi\Phi_k + \xi^2\frac{d\Phi_k}{d\xi} + u_k = \Sigma A_m\xi^m$$

$\Sigma A_m\xi^m$ étant une série donnée procédant suivant les puissances de $\xi$. On y satisfait en faisant:

$$u_k = A_0, \qquad \Phi_k = A_1 + \frac{A_2\xi}{2} + \frac{A_3\xi^2}{3} + \dots$$

On peut donc calculer les $\Phi_k$ et les $u_k$, mais il reste à savoir si le développement converge.

Pour cela je compare l'équation (1') à la suivante:

(1'')
$$U' = U'_0 + \xi\Phi' - \frac{2\eta}{\xi}(\Phi' - \varphi')$$

$U'$ est une série donnée procédant suivant les puissances de $\xi$ et des $x$. $U'_0$ et $\Phi'$ sont des séries inconnues procédant la première suivant les puissances de $\eta$ et des $x$, la seconde suivant celles de $\xi$, de $\eta$ et des $x$, et où enfin $\varphi'$ est ce que devient $\Phi'$ pour $\xi = 0$. L'équation (1'') en posant:

$$U'_0 = \Sigma\eta^m u'_m, \qquad \Phi' = \Sigma\eta^m\Phi'_m, \qquad \varphi' = \Sigma\eta^m\varphi'_m$$

se décompose en une série d'équations:

(2'')
$$\begin{aligned}
&\xi\Phi'_0 + u'_0 = U',\\
&\xi\Phi'_1 + u'_1 = 2\,\frac{\Phi'_0 - \varphi'_0}{\xi},\\
&\xi\Phi'_2 + u'_2 = 2\,\frac{\Phi'_1 - \varphi'_1}{\xi},\\
&\dots\dots\dots\dots
\end{aligned}$$

Supposons que $U'$ ait tous ses coefficients positifs et plus grands en valeur absolue que ceux de $U$ et comparons les équations (2') et (2''); soit:

$$U = \Sigma A\, \xi^m\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \qquad U' = \Sigma A' \xi^m\ x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}; \qquad A' > |A|$$

$$\Phi_0 = \Sigma B_0 \xi^{m+1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \qquad \Phi'_0 = \Sigma B'_0 \xi^{m+1} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

$$\Phi_1 = \Sigma B_1 \xi^{m+3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}, \qquad \Phi'_1 = \Sigma B'_1 \xi^{m+3} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3},$$

$$\cdots\cdots\cdots \qquad \cdots\cdots\cdots$$

Il viendra:

$$B_0 = \frac{A}{m}, \qquad B'_0 = A'; \qquad B_1 = \frac{m-1}{m-2} B_0; \qquad B'_1 = 2B'_0;$$

ce qui montre que les $B'$ sont positifs et que:

$$B'_k > |B_k|.$$

La convergence des séries dans le cas de l'équation (1'') entraîne donc la convergence dans le cas de l'équation (1').

Or on satisfera à l'équation (1'') en faisant:

$$U'_0 = \frac{U'(\sqrt{2\eta}) + U'(-\sqrt{2\eta})}{2}; \qquad \varphi' = \frac{U'(\sqrt{2\eta}) - U'(-\sqrt{2\eta})}{2\sqrt{2\eta}},$$

$$\Phi' = \varphi' + \xi \frac{U' - U'_0 - \xi\varphi'}{\xi^2 - 2\eta}.$$

Inutile de dire que $U'(\sqrt{2\eta})$ représente ce que devient $U'$ quand on y change $\xi$ en $\sqrt{2\eta}$.

On voit en effet que dans ces conditions $U' - U'_0 - \xi\varphi'$ est divisible par $\xi^2 - 2\eta$.

Ainsi nos séries convergent et $U$ peut se mettre sous la forme (1).

Nous pouvons alors trouver la valeur de $V$ puisque nous avons l'intégrale indéfinie:

$$U_0 \log\left[t - Y + \sqrt{t^2 - 2Yt + Z}\right] + \Phi\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}.$$

Nous supposerons que les deux extrémités de la courbe attirante correspondent aux valeurs $t_0$ et $t_1$ du paramètre $t$; de sorte que les deux limites d'intégration seront $t_0$ et $t_1$.

Nous supposerons d'abord que $t_0$ et $t_1$ ne sont pas nuls et que par exemple

$$t_0 < 0 < t_1.$$

En d'autres termes, nous étudierons le potentiel dans le voisinage d'un point de la courbe qui n'est pas une des extrémités.

Dans ces conditions $U_0$, $\Phi(t_1)$, $\Phi(t_0)$, et les deux radicaux:

$$\sqrt{t_1^2 - 2Yt_1 + Z}, \quad \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}$$

sont des fonctions holomorphes des $x$; il en est de même de

$$\log[t_1 - Y + \sqrt{t_1^2 - 2Yt_1 + Z}].$$

Car le radical est développable suivant les puissances de $Y$ et de $Z$ et le logarithme ne devient pas infini pour $Y = Z = 0$.

Il n'en est plus de même de

$$\log[t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}]$$

car si l'on fait $Y = Z = 0$, il reste

$$\log(t_0 + \sqrt{t_0^2}).$$

Si l'on convient de prendre la détermination positive du radical; il faudra, puisque $t_0$ est négatif, prendre

$$\sqrt{t_0^2} = -t_0$$

d'où:

$$\log(t_0 + \sqrt{t_0^2}) = \log(t_0 - t_0) = \infty.$$

Au contraire

$$\log(-t_0 + Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z})$$

se réduit pour $Y = Z = 0$ à $\log(-2t_0)$ et n'est pas infini; c'est donc une fonction développable suivant les puissances des $x$.

Or nous avons:

$$\log(t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z})$$
$$= \log(Z - Y^2) - \log(-t_0 + Y + \sqrt{t_0^2 - 2Yt_0 + Z}).$$

Donc:

**Théorème 9**; *le potentiel $V$ d'une courbe attirante est égal dans le voisinage d'un point de cette courbe qui n'est ni une extrêmité de la courbe, ni un point singulier; ce potentiel, dis-je, est égal à une fonction $U_0$ holomorphe par rapport aux $x$, multipliée par* $\log(Z - Y^2)$, *plus une autre fonction holomorphe des $x$. D'ailleurs $Z - Y^2$ est aussi une fonction holomorphe des $x$.*

Supposons maintenant $t_0 = 0$; ou en d'autres termes, étudions le potentiel dans le voisinage d'une des extrêmités de la courbe. Alors

$$\sqrt{t_0^2 - 2t_0 Y + Z}$$

se réduit à $\sqrt{Z}$ et n'est plus une fonction holomorphe des $x$. Mais $Z$ est égal à $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, multiplié par une fonction holomorphe des $x$ ne s'annulant pas avec les $x$.

On a d'autre part

$$\log(t_0 - Y + \sqrt{t_0^2 + 2t_0 X + Z}) = \log(\sqrt{Z} - Y).$$

Le potentiel est alors égal à la fonction holomorphe $U_0$ multipliée par $\log(\sqrt{Z} - Y)$, plus une fonction holomorphe, plus une autre fonction homorphe multipliée par $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$.

En résumé soit une courbe attirante $AOB$, décomposons-la en deux segments $AO$ et $OB$; et prenons le point $O$ pour origine.

Dans le voisinage du point $O$, le potentiel du premier segment sera

$$U_0 \log(\sqrt{Z} - Y) + H + W\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2})$$

et celui du second segment:

$$U_0 \log(\sqrt{Z} + Y) + H' - W\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$$

$U_0$, $H$, $H'$ et $W$ étant des fonctions holomorphes; celui de la courbe entière sera:

$$U_0 \log(Z - Y^2) + H + H'.$$

Pour bien nous rendre compte de la signification de ce résultat, cherchons d'abord ce que c'est que la surface $Z - Y^2 = 0$; l'équation

$$Z = Y^2$$

signifie que l'équation en $t$

$$t^2 - 2tY + Z = 0$$

a deux racines égales; or cette équation en $t$ est équivalente à la suivante:

$$r = 0.$$

Supposons donc que du point $x_1, x_2, x_3$ comme centre nous décrivions une sphère de rayon nul. Cette sphère coupera la courbe attirante en un certain nombre de points imaginaires; le lieu des points $x_1, x_2, x_3$ qui sont tels que deux de ces points imaginaires d'intersection se confondent est précisément la surface

$$Z = Y^2.$$

Cette surface est imaginaire, mais elle présente une courbe réelle qui n'est autre chose que la courbe attirante.

Cherchons maintenant la signification de $U_0$.

Notre potentiel $V$ est égal à l'intégrale:

$$\int_{t_0}^{t_1} \frac{U dt}{\sqrt{t^2 - 2Yt + Z}}.$$

La fonction sous le signe $\int$, considérée comme fonction de $t$, présente un certain nombre de points singuliers. Représentons ces points singuliers dans le plan des $t$; nous ne nous occuperons que de ceux d'entre eux qui sont voisins de l'origine; ils sont au nombre de deux qui sont les racines de l'équation en $t$

$$t^2 - 2tY + Z = 0.$$

Soient $\tau$ et $\tau'$ ces deux points:

Quand les variables $x$ varieront, ces deux points $\tau$ et $\tau'$ varieront également; et quand les $x$ auront décrit un contour fermé; ces deux points $\tau$ et $\tau'$ décriront des contours fermés ou s'échangeront entre eux.

Dans ce dernier cas (ou bien encore si $\tau$ et $\tau'$ décrivent des contours fermés, mais de telle sorte que $\tau$ ait tourné autour de $\tau'$) l'intégrale définie $V$ ne reprendra pas sa valeur, mais elle augmentera d'une période.

Cette période que j'appelle $\Pi$ sera l'intégrale

$$\int \frac{Udt}{\sqrt{t^2 - 2tY + Z}}$$

prise le long d'un contour fermé enveloppant les deux points $\tau$ et $\tau'$. Or les diverses déterminations de notre intégrale définie $V$ correspondent aux diverses déterminations du logarithme

$$\log(Z - Y^2).$$

Quand ce logarithme augmente de $2i\pi$, $V$ augmente de $2i\pi U_0$; on a donc:

$$\Pi = 2i\pi U_0.$$

Il serait d'ailleurs aisé de vérifier que la période $\Pi$ est une fonction holomorphe des $x$. En effet, le contour fermé le long duquel cette intégrale est prise peut être choisi d'une manière quelconque pourvu qu'il enveloppe $\tau$ et $\tau'$. Je le choisirai donc fixe et indépendant des $x$. Comme il passe toujours à distance finie des deux points $\tau$ et $\tau'$, la fonction sous le signe $\int$ est en tous ses points, holomorphe par rapport à $t$ et aux $x$. L'intégrale est donc une fonction holomorphe des $x$.

C. Q. F. D.

Il faudrait pour être complet, étudier $V$ dans le voisinage d'un point singulier de la courbe attirante, par exemple d'un point de rebroussement. Je me contenterai de la remarque suivante:

Soit $\rho$ la distance du point $x_1, x_2, x_3$ au point singulier. Le produit $V\rho$ tend vers o quand le point $x_1, x_2, x_3$ se rapproche indéfiniment du point singulier en suivant une courbe quelconque non tangente à la courbe attirante.

Revenons à notre fonction $U_0$, cherchons sa valeur quand les $x$ s'annulent; c'est au facteur constant près $i\pi$ l'intégrale:

$$\int_{\tau}^{\tau'} \frac{Udt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}}.$$

Si les $x$ sont très petits, $\tau$ et $\tau'$ sont très voisins l'un de l'autre et de

zéro et quand $t$ varie de $\tau$ à $\tau'$, $t$ reste très petit. Alors sous le signe $\int$ le fonction $U$ ne prend que des valeurs très peu différentes de $A$, $A$ étant la valeur de $U$ quand $t$ et les $x$ s'annulent.

L'intégrale diffère donc peu de

$$A\int\frac{dt}{\sqrt{(t-\tau)(t-\tau')}} = Ai\pi.$$

Ainsi $U_0$ se réduit à $A$ quand les $x$ s'annulent.

Or nous avons

$$U = \frac{\delta\psi}{\sqrt{\theta}},$$

$$\psi = \sqrt{\sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2}; \qquad \theta(t-\tau)(t-\tau') = \Sigma(x'-x)^2.$$

Quand les $x$ s'annulent, $\tau$ et $\tau'$ s'annulent et il reste:

$$\theta t^2 = \Sigma x'^2.$$

Si $t$ est très-petit, on a sensiblement

$$x' = t\,\frac{dx'}{dt};$$

il reste donc:

$$\theta = \sum\left(\frac{dx'}{dt}\right)^2 = \psi^2.$$

On en conclut:

$$U = \delta.$$

Ainsi sur la courbe attirante, la fonction $U_0$ n'est autre chose que la densité.

Ce que nous venons de dire de l'intégrale

$$\int\frac{\delta\, ds}{r}$$

s'applique sans aucun changement si la courbe attirante, au lieu d'être dans l'espace ordinaire, est dans l'espace à $n$ dimensions et si au lieu de trois variables $x_1$, $x_2$, $x_3$, nous en avons un nombre quelconque.

Revenons encore sur quelques points de détail et d'abord sur la génération de la surface

$$Z = Y^2.$$

C'est l'enveloppe d'un cône isotrope (c'est à dire d'un sphère de rayon nul) dont le sommet décrit la courbe attirante. On voit aisément que c'est une surface développable.

Reprenons la formule donnée plus haut:

$$V = U_0 \log(Z - Y^2) + H + H';$$

on en tire:

$$\frac{dV}{dx_1} = \frac{dU_0}{dx_1} \log(Z - Y^2) + U_0 \frac{d \log(Z - Y^2)}{dx_1} + \frac{d(H + H')}{dx_1}$$

et

$$\frac{dU_0}{dx_1} V - \frac{dV}{dx_1} U_0 = \frac{dU_0}{dx_1}(H + H') + U_0 \frac{d(H + H')}{dx_1} + U_0^2 \frac{d \log(Z - Y^2)}{dx_1}.$$

Je remarque que $U_0$ et $\frac{dU_0}{dx_1}$ sont des fonctions holomorphes des $x$ et que le second membre est égal à une fonction holomorphe des $x$ divisée par $Z - Y^2$.

Donc $V$ satisfait à une équation linéaire du premier ordre à second membre et à coëfficients holomorphes.

Il est intéressant, au point de vue de la généralisation qui va suivre de retrouver ce résultat par une autre voie.

Nous avons:

$$V = \int \frac{\delta \psi dt}{r}$$

et nous en tirons aisément:

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{dt}{r^3} \left[ r^2 \frac{d(\delta \psi)}{dx_1} - r \frac{dr}{dx_1} \delta \psi \right].$$

Les fonctions $\delta \psi$, $r^2$ et

$$r^2 \frac{d(\delta \psi)}{dx_1} - r \frac{dr}{dx_1} \delta \psi = M$$

sont holomorphes par rapport à $t$ et aux $x$; de plus le développement de $r^2$ commence par des termes du $2^d$ degré, celui de $\delta\psi$ par des termes de degré 0; celui de $M$ par des termes du degré 1. Nous poserons:

$$\delta\psi = N$$

de sorte que nos intégrales prendront la forme:

$$V = \int \frac{N dt}{r}, \quad \frac{dV}{dx_1} = \int \frac{M dt}{r^3}.$$

Transformons ces deux intégrales, et d'abord l'intégrale $V$; nous allons chercher à mettre l'intégrale indéfinie sous la forme:

$$\int \frac{N dt}{r} = \Phi \int \frac{dt}{r} + Pr$$

$P$ étant une fonction holomorphe de $t$ et des $x$, et $\Phi$ une fonction holomorphe des $x$ seulement.

Cela nous donne:

$$N = \Phi + r^2 \frac{dP}{dt} + r \frac{dr}{dt} P. \tag{3}$$

Cette équation (3) présente une grande analogie avec l'équation (1'); elle pourrait, soit se traiter de la même manière, soit s'y ramener par une transformation simple; mais, au point de vue de la généralisation, je préfère suivre une autre marche.

Je développe $r^2$ suivant les puissances de $t$ et des $x$, et je fais de même pour $N$, $P$ et $\Phi$; je groupe ensemble les termes de même degré et j'écris:

$$r^2 = F_2 + F_3 + \ldots,$$

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_1 + \Phi_2 + \ldots,$$

$$N = N_0 + N_1 + N_2 + \ldots.$$

$$P = P_0 + P_1 + \ldots.$$

La notation $F_k$ par exemple représente un groupe de termes homogène par rapport à $t$ et aux $x$.

L'équation (3) se décompose alors et nous donne:

$$N_0 = \Phi_0; \quad N_1 = \Phi_1 = \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_0; \quad N_2 = \Phi_2 + F_1\frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_3}{dt}P_0;$$

$$N_3 = \Phi_3 + F_1\frac{dP_2}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_2 + F_3\frac{dP_1}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_3}{dt}P_1 + \frac{1}{2}\frac{dF_4}{dt}P_0.$$

. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . .

La première équation nous donne $\Phi_0$; de la seconde, on tirera $P_0$ et $\Phi_1$. La troisième nous donnera $P_1$ et $\Phi_2$, la quatrième $P_2$ et $\Phi_3$, etc.

En général ces équations prendront la forme:

$$F_1\frac{dP_k}{dt} + \frac{1}{2}\frac{dF_2}{dt}P_k + \Phi_{k+1} = H_{k+1}$$

$H_k$ étant un polynôme *connu* homogène et de degré $k+1$ par rapport à $t$ et aux $x$.

Pour résoudre cette équation, posons:

$$P_k = \Sigma A_m t^m, \qquad H_{k+1} = \Sigma B_m t^m, \qquad F_2 = C_2 t^2 + 2C_1 t + C_0.$$

Les $A$ et les $B$ sont évidemment des polynômes homogènes par rapport aux $x$. Les degrés respectifs de $A_m, B_m, C_2, C_1, C_0$ sont $k-m$, $k+1-m$, $0$, $1$ et $2$.

En égalant les termes en $t^m$, on trouve:

$$mC_2A_{m-1} + (2m+1)C_1A_m + (m+1)C_0A_{m+1} = B_m.$$

Comme $C_2$ est une constante, on fera successivement dans l'équation précédente

$$m = k+1, k, k-1, \ldots, 2, 1$$

ce qui permettra de calculer successivement

$$A_k, A_{k-1}, \ldots, A_0$$

qui seront des polynômes entiers par rapport aux $x$.

La dernière équation qui correspond au cas de $m=0$ est d'une forme un peu différente, elle s'écrit:

$$3C_1A_0 + 2C_0A_1 + \Phi_{k+1} = B_0$$

et elle nous donne $\Phi_{k+1}$.

On peut donc mettre $N$ sous la forme (3), la question de convergence des séries demeurant réservée.

Occupons-nous maintenant de transformer l'intégrale:

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{Mdt}{r^3}.$$

Je m'appuierai sur le lemme suivant, sur lequel je me réserve de revenir plus loin.

Soient trois fonctions holomorphes $M$, $A_1$ et $A_2$. Si $M$ s'annule toutes les fois que $A_1$ et $A_2$ s'annulent à la fois, (au moins dans le voisinage de l'origine), on peut trouver deux fonctions holomorphes $B_1$ et $B_2$ telles que l'on ait identiquement:

$$M = A_1 B_1 + A_2 B_2.$$

Considérons les deux fonctions holomorphes

$$r^2 \text{ et } r\frac{dr}{dt}.$$

Pour qu'elles s'annulent à la fois, il faut que l'équation

$$t^2 - 2Xt + Z = 0$$

ait deux racines égales; c'est à dire que

$$Z - Y^2 = 0.$$

La fonction $(Z - Y^2)M$ s'annule donc toutes les fois que $r^2$ et $r\dfrac{dr}{dt}$ s'annulent à la fois de sorte qu'on peut poser:

$$(Z - Y^2)M = r^2 B_1 + r\frac{dr}{dt}B_2,$$

$B_1$ et $B_2$ étant holomorphes; on en déduit

$$\int \frac{Mdt}{r^3}(Z - Y^2) = \int \left(B_1 + \frac{dB_2}{dt}\right)\frac{dt}{r} - \frac{B_2}{r}.$$

L'intégrale

$$\int \left(B_1 + \frac{dB_2}{dt}\right)\frac{dt}{r}$$

peut se traiter comme $V$, ce qui montre qu'elle est égale a:

$$\Phi' \int \frac{dt}{r} + P'r$$

$\Phi'$ et $P'$ étant holomorphes; on a donc finalement:

(4) $$(Z - Y^2)\int \frac{Mdt}{r^3} = \Phi' \int \frac{dt}{r} + P'r - \frac{B_2}{r}.$$

Il reste à traiter la question de la convergence des séries.

Pour démontrer la convergence de la série $P$ qui entraîne celle de toutes les autres, j'emploierai la méthode des fonctions majorantes et je comparerai l'équation (3) à l'équation:

(3') $$N'' = \Phi'' + \frac{d}{dt}(P''F'')$$

où $N''$ est une série donnée, holomorphe en $t$ et $x$ et dont tous les coëfficients sont positifs et plus grands en valeur absolue que ceux de $N$; où $\Phi''$ et $P''$ sont deux séries inconnues holomorphes la première en $x$, la seconde en $t$ et $x$, où enfin

$$F'' = \frac{C_2 t^2}{2} - G$$

$G$ étant une série dont les coëfficients sont positifs et égaux à la valeur absolue de ceux de $r^2 - C_2 t^2$.

L'intégration de l'équation (3') est d'ailleurs facile.

On en tire:

$$P''F''' = \int N''dt - \Phi''t - \Phi'''$$

$\Phi'''$ étant une nouvelle série holomorphe en $x$; on peut toujours choisir les deux séries inconnues $\Phi''$ et $\Phi'''$ de telle façon que le second membre soit divisible par $F''$; on obtiendra ensuite immédiatement $P''$.

Cela posé, reprenons l'équation (4) et l'équation qui donne la valeur de $\int \frac{N dt}{r}$; nous en tirerons:

$$(5) \qquad (Z - Y^2)\Phi \int \frac{M dt}{r^3} - \Phi' \int \frac{N dt}{r} = (\Phi P' - P\Phi')r + \frac{\Phi B_2}{r}.$$

Cherchons les valeurs de $\Phi$ et de $\Phi'$, et pour cela prenons l'équation:

$$\int \frac{N dt}{r} = \Phi \int \frac{dt}{r} + Pr.$$

Prenons les intégrales le long d'un contour fermé enveloppant $\tau$ et $\tau'$; le premier membre devient égal à $U_0$; soit $J$ l'intégrale $\int \frac{dt}{r}$ prise le long de ce même contour. Quant à l'intégrale

$$\int d(Pr)$$

prise le long d'un contour fermé, elle est nulle; il vient donc:

$$U_0 = \Phi J.$$

Nous avons vu que $U_0$ est une fonction holomorphe des $x$ ne s'annulant pas avec les $x$. Pour la même raison, il en est de même de $J$.

On trouve de même, en partant de l'équation (4)

$$(Z - Y^2)\frac{dU_0}{dx_1} = \Phi' J$$

et alors l'équation (5) peut s'écrire:

$$(Z - Y^2)\left[U_0 \int \frac{M dt}{r^3} - \frac{dU_0}{dx_1}\int \frac{N dt}{r}\right] = \left[U_0 P' - P\frac{dU_0}{dx_1}(Z - Y^2)\right]r + \frac{U_0 B_2}{r}$$

ou en prenant les intégrales entre les limites $t_0$ et $t_1$

$$(Z - Y^2)\left(U_0 \frac{dV}{dx_1} - V\frac{dU_0}{dx_1}\right) = \theta,$$

$\theta$ étant une fonction holomorphe des $x$.

C. Q. F. D.

## § 5. *Généralisation.*

Je me propose d'étendre les résultats précédents au cas d'une variété attirante à $n - 2$ dimensions dans l'espace à $n$ dimensions, la loi d'attraction étant en raison inverse de la puissance $n - 1$ des distances.

Soit $v$ la variété attirante, $O$ un point de cette variété dans le voisinage duquel nous voulons étudier le potentiel. Nous supposerons que ce n'est pas un point singulier et nous le prendrons pour origine.

Les équations de la variété $v$ prendront la forme suivante:

$$x'_k = \varphi_k(t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}) \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

les $\varphi_k$ étant holomorphes et s'annulant avec les $t$.

L'expression

$$r^2 = \Sigma(x_k - x'_k)^2$$

est développable en série procédant suivant les puissances des $x$ et des $t$ le développement commence par des termes du 2[d] degré; je pourrai toujours choisir les variables auxiliaires $t$ de telle façon, que quand les $x$ s'annulent, les termes du second degré de $r^2$ se réduisent à

$$t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_{n-2}^2.$$

Cela posé, le potentiel cherché sera représenté par l'intégrale $n - 2^{\text{ple}}$

$$V = \int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}};$$

$N$ désigne une fonction holomorphe des $t$ et des $x$ et j'ai désigné pour abréger par $d\sigma$ le produit:

$$d\sigma = dt_1 dt_2 \ldots dt_{n-2}.$$

L'intégrale $V$ n'est pas une fonction holomorphe des $t$ et des $x$ parce que $r$ s'annule avec les $t$ et les $x$, c'est à dire dans le champ d'intégration. Voyons d'un peu plus près en quoi consiste cette singularité.

Représentons dans l'espace à $2n - 4$ dimensions les parties réelles et imaginaires des $n - 2$ variables complexes $t_1, t_2, \ldots, t_{n-2}$.

L'intégrale $V$ est une intégrale $n - 2^{\text{ple}}$ étendue aux éléments d'une certaine variété $w$ à $n - 2$ dimensions située dans cet espace à $2n - 4$ dimensions.

Cette variété est d'ailleurs plane; soit en effet

$$t_k = u_k + \sqrt{-1}\, v_k.$$

Comme dans l'intégrale $V$, nous ne donnons aux $t$ que des valeurs réelles, nous aurons

$$v_1 = v_2 = \ldots = v_{n-2} = 0.$$

C'est là l'équation de notre variété $w$. Mais cette variété n'est pas indéfinie, elle est limitée par une variété à $n - 3$ dimensions que j'appellerai $\lambda$ et qui aura pour équations

$$v_k = 0, \qquad f(u_1, u_2, \ldots, u_{n-2}) = 0.$$

Pour achever de définir la variété $w$, il faut donc adjoindre aux équations $v_k = 0$, l'inégalité $f > 0$.

La variété $\lambda$ est ainsi le *bord* de la variété $w$.

Le point

$$t_1 = t_2 = \ldots = t_{n-2} = 0$$

n'appartient d'ailleurs pas à $\lambda$; car nous n'avons pas supposé que le point $O$ se trouvait sur le bord de la variété attirante $v$.

D'après un théorème connu, généralisation de celui de CAUCHY, (cf. Mémoire *sur les résidus des intégrales doubles,* Acta mathematica, tome 9), l'intégrale ne changera pas quand on la prendra le long d'une autre variété $w'$, ayant même bord que $w$, pourvu qu'on puisse passer d'une manière continue de $w$ à $w'$ sans rencontrer de point singulier.

Quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ décrira certains contours fermés, il faudra déformer la variété $w$ d'une manière continue de telle façon que sur cette variété ne se trouve jamais aucun point singulier; quand le contour fermé aura été complètement décrit, il pourra se faire que la variété $w$ ne revienne pas à sa forme primitive, et se soit changée en une autre variété $w'$.

L'intégrale $V$ se sera alors changée en $V + U_0$, $U_0$ étant une période de l'intégrale $(n-2)^{\text{ple}}$

$$\int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Pour aller plus loin, nous allons appliquer la même méthode que dans le cas de l'espace ordinaire.

Nous allons chercher à mettre $N$ sous la forme:

$$(1) \qquad N = r^2 \sum \frac{dP_k}{dt_k} - (n-4) \sum P_k r \frac{dr}{dt_k} + \Phi$$

où $\Phi$ est une fonction holomorphe des $x$ et les $P_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-2)$ des fonctions holomorphes des $x$ et des $t$.

Cette équation équivaut en effet à:

$$(2) \qquad \int \frac{N d\sigma}{r^{n-2}} = \sum \int \frac{d}{dt_k} \left( \frac{P^k}{r^{n-4}} \right) d\sigma + \Phi \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}.$$

Décomposons les séries $N$, $P_k$, $\Phi$, $r^2$ en groupes de termes homogènes tant par rapport aux $t$ que par rapport aux $x$. Soient

$$N_{\mu.\nu}, \quad P_{k.\mu.\nu}, \quad \Phi_\mu, \quad F_{\mu.\nu}$$

les groupes de termes de

$$N, \quad P_k, \quad \Phi, \quad r^2$$

qui sont de degré $\mu$ par rapport aux $x$ et de degré $\nu$ par rapport aux $t$.

Nous allons calculer les groupes inconnus $P_{k.\mu.\nu}$ dans l'ordre suivant: on commencera par les termes où $\mu + \nu$ est le plus petit et on rangera les groupes dans l'ordre des $\mu + \nu$ croissants; les groupes correspondant à une même valeur de $\mu + \nu$ seront rangés dans l'ordre des $\mu$ croissants.

Nous aurons donc en posant pour abréger

$$P_{k.\mu.\nu} = \Pi_k,$$

en nous rappelant que

$$F_{0.2} = \Sigma t^2$$

et en désignant par $M$ un ensemble de termes déjà calculés, homogènes

de degré $\mu$ par rapport aux $x$ et de degré $\nu + 1$ par rapport aux $t$, nous aurons donc, dis-je: (en égalant dans (3) les termes de même degré)

$$(3) \qquad M = \sum t^2 \sum \frac{d\Pi_k}{dt_k} - (n-4)\Sigma \Pi_k t_k.$$

Nous poserons $\sum \frac{d\Pi}{dt} = Z$ et d'autre part, on peut poser et cela d'une infinité de manières:

$$M = \Sigma t_k A_k.$$

Nous chercherons donc à faire:

$$A_k = t_k Z - (n-4)\Pi_k$$

d'où l'on tire aisément:

$$\sum \frac{dA_k}{dt_k} = (\nu + 1) Z$$

en tenant compte de

$$\sum t_k \frac{dZ}{dt_k} = (\nu - 1) Z, \qquad Z = \sum \frac{d\Pi_k}{dt_k}$$

car $Z$ est homogène de degré $\nu - 1$ par rapport aux $t$.

Nos équations nous donneront donc $Z$ et les $\Pi_k$.

En égalant dans l'équation (3) les termes de degré $\mu$ par rapport aux $x$ et 0 par rapport aux $t$, on a une équation qui donne $\Phi_\mu$.

Il resterait à traiter la question de la convergence des séries; comme les théorèmes que je démontre dans ce paragraphe et dans le précédent ne sont pas indispensables pour mon sujet principal, je ne veux pas trop m'y attarder et je me bornerai à indiquer la marche générale de la démonstration.

Il est d'abord facile de mettre $r^2 = F$ sous la forme suivante:

$$r^2 = F = u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_{n-2}^2 + z$$

où $u_k$ est une série développée suivant les puissances de $t$ et des $x$, commençant par des termes du 1^er^ degré, et dont les termes du 1^er^ degré se réduisent à $t_k$ quand les $x$ s'annulent;

où $z$ est une série développée suivant les puissances des $x$ et commençant par des termes du second degré.

Cela posé l'intégrale

$$\int \frac{N dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2}}{r^{n-2}}$$

devient:

$$\int \frac{N \Delta du_1 du_2 \dots du_{n-2}}{r^{n-2}}$$

où $\Delta$ est le jacobien des $t$ par rapport aux $u$; ce jacobien étant une fonction holomorphe des $t$ et des $x$, et aussi des $u$ et des $x$, nous voyons que nous pouvons toujours supposer que l'on a:

$$r^2 = \Sigma t^2 + z$$

car les $u$ peuvent jouer le même rôle que les $t$.

Supposons donc

$$r^2 = \Sigma t^2 + z.$$

Notre équation devient alors:

$$(4) \qquad (\Sigma t^2 + z)\sum \frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma(tP) = N - \Phi.$$

Notre fonction $N$ peut se développer en une série absolument convergente de la forme

$$N = \Sigma Y \rho^\beta$$

où $\beta$ est un entier pair et où $Y$ est un polynome homogène de degré $\alpha$ par rapport aux $t$ et satisfaisant à l'équation

$$\sum \frac{d^2 Y}{dt^2} = \Delta Y = 0$$

et où enfin on a posé

$$\rho^2 = \Sigma t^2.$$

Cherchons à satisfaire à la fois aux équations

$$\sum \frac{dP}{dt} = 0, \qquad \Sigma tP = -\frac{1}{n-4} Y \rho^\beta.$$

Pour cela faisons:

$$P_k = a\frac{dY}{dt_k}\rho^\beta + bt_k Y\rho^{\beta-2}$$

où $a$ et $b$ sont des coëfficients qu'il s'agit de déterminer. Pour cela on trouve les deux équations:

$$a\alpha + b = -\frac{1}{n-4},$$

$$\alpha + \beta + b(\alpha + \beta + n - 4) = 0$$

dont le déterminant ne s'annule que pour

$$\alpha = 0 \quad \text{ou} \quad \alpha + n - 4 = 0.$$

Comme $n$ est plus grand que 4, cette seconde hypothèse ne peut se réaliser, mais nous devons exclure le cas de $\alpha = 0$.

Appelons donc $N_0$ l'ensemble des termes de $N$ pour lesquels $\alpha$ sera nul, de sorte que $N_0$ sera fonction de $\rho^2$ seulement et résolvons l'équation

$$(4') \qquad (\Sigma t^2 + z)\sum\frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma(tP) = N - N_0;$$

cela pourra se faire en prenant:

$$P = \sum a\frac{dY}{dt}\rho^\beta + \Sigma bt Y\rho^{\beta-2}$$

(les termes où $\alpha$ est nul étant exclus); comme les coefficients $a$ et $b$ sont limités, la série est convergente.

Il faut maintenant trouver des séries $P_k$ satisfaisant à l'équation:

$$(4'') \qquad (\rho^2 + z)\sum\frac{dP}{dt} - (n-4)\Sigma tP = N_0 - \Phi.$$

Nous poserons:

$$P_k = t_k Q$$

$Q$ étant une fonction de $\rho^2$; l'équation devient:

$$(\rho^2 + z)\left[(n-2)Q + \rho\frac{dQ}{d\rho}\right] - (n-4)\rho^2 Q = N_0 - \Phi$$

ou bien:

$$\frac{d}{d\rho}\left[\frac{Q\rho^{n-2}}{(\rho^2+z)^{\frac{n-4}{2}}}\right] = \frac{(N_0 - \Phi)\rho^{n-3}}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}}.$$

L'équation est tout à fait semblable à celle qui a été traité dans le paragraphe précédent, et pourrait se traiter de la même manière.

On pourrait dire aussi: nous déterminerons $\Phi$ à l'aide de l'équation:

$$\int \frac{N_0\rho^{n-3}d\rho}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}} = \Phi \int \frac{\rho^{n-3}d\rho}{(\rho^2+z)^{\frac{n-2}{2}}}$$

les intégrales étant prises le long d'un contour fermé entourant les deux points

$$\rho = \pm\sqrt{-z}.$$

Si dans ces intégrales on pose:

$$\rho = \rho'\sqrt{z}$$

et qu'on prenne les intégrales suivant un contour entourant les deux points $\rho' = \pm i$, l'intégrale du second membre sera une constante; dans celle du 2[d] membre la fonction sous le signe $\int$ sera une fonction holomorphe des $x$ et de $\sqrt{z}$; $\Phi$ devra donc être une fonction holomorphe des $x$ et de $\sqrt{z}$; et j'ajouterai des $x$ et de $z$; car $\Phi$ ne change pas quand $\sqrt{z}$ se change en $-\sqrt{z}$.

Si $\Phi$ est une fonction holomorphe; il est clair qu'il en est de même de $Q$.

On pourrait aussi ramener nos intégrales par des intégrations par parties aux cas simples $n = 3$ ou $n = 4$.

Pour résumer cette longue discussion:

l'intégrale $V$ peut toujours être mise sous la forme:

$$\int \frac{N\,d\sigma}{r^{n-2}} = \sum \int \frac{d}{dt_k}\left(\frac{P^k}{r^{n-4}}\right)d\sigma + \Phi \int \frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{2}$$

Considérons maintenant l'intégrale:

$$\frac{dV}{dx_1} = \int \frac{M\,d\sigma}{r^n}$$

où

$$M = r^2 \frac{dN}{dx_1} + (n - 2)N(x_1 - x_1')$$

est une fonction holomorphe des $t$ et des $x$.

Considérons les équations:

$$(5) \qquad r^2 = r\frac{dr}{dt_1} = r\frac{dr}{dt_2} = \ldots = r\frac{dr}{dt_{n-2}} = 0$$

et éliminons les $t$ entre les équations dont les premiers membres sont holomorphes en $t$ et en $x$; nous obtiendrons une certaine équation:

$$(6) \qquad H = 0$$

dont le premier membre sera holomorphe par rapport aux $x$. En appliquant le même lemme que dans le paragraphe précédent, nous pourrons écrire:

$$HM = Ar^2 + B_1 r\frac{dr}{dt_1} + B_2 r\frac{dr}{dt_2} + \ldots + B_{n-2} r\frac{dr}{dt_{n-2}},$$

$A$ et les $B$ étant holomorphes en $t$ et en $x$; car $H$ s'annule toutes les fois que les équations (5) sont satisfaites.

Ce lemme est bien connu; et d'ailleurs, en ce qui concerne son application actuelle, il suffit pour lui donner une évidence immédiate, de rappeler que nous avons vu qu'on peut toujours supposer:

$$r^2 = \Sigma t^2 + z$$

d'où

$$r\frac{dr}{dt_k} = t_k; \qquad H = z.$$

Cela posé notre intégrale devient

$$H\int\frac{M d\sigma}{r^n} = \int\left[A + \frac{1}{n-2}\sum\frac{dB_k}{dt_k}\right]\frac{d\sigma}{r^{n-2}} - \sum\int\frac{d}{dt_k}\left(\frac{B_k}{(n-2)r^{n-2}}\right)d\sigma.$$

La première intégrale du 2[d] membre se traitera comme $\int\frac{N d\sigma}{r^{n-2}}$ et on

trouvera finalement l'équation suivante analogue à (2) ainsi qu'à l'équation (4) du paragraphe précédent:

$$H\int\frac{M\,d\sigma}{r^n} = \sum\int\frac{d}{dt_k}\left(\frac{P'_k}{r^{n-4}}\right)d\sigma + \Phi'\int\frac{d\sigma}{r^{n-2}}. \tag{7}$$

Nous n'avons plus qu'à continuer le raisonnement comme dans le paragraphe précédent

Dans l'équation (2) comme dans l'équation (7), le premier terme du second membre est nul si l'intégrale est prise le long d'une variété fermée; elle est une fonction holomorphe des $x$ dans le cas contraire.

Prenons d'abord les intégrales le long de la variété fermée qui correspond à la période $U_0$ dont nous avons parlé plus haut, les équations (2) et (7) nous donneront:

$$U_0 = \Phi J,$$

$$H\frac{dU_0}{dx_1} = \Phi' J,$$

$J$ étant la période de l'intégrale $\int\frac{d\sigma}{r^{n-2}}$, laquelle période est une fonction holomorphe des $x$ ne s'annulant pas avec les $x$.

On tirera alors des équations (2) et (7) (en prenant les intégrales dans les limites qui conviennent à $V$):

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_1} - V\frac{dU_0}{dx_1}\right) = \theta_1,$$

$\theta_1$ étant une fonction holomorphe des $x$ et on trouverait de même:

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_2} - V\frac{dU_0}{dx_2}\right) = \theta_2,$$

. . . . . . . . . . . . . . .

$$H\left(U_0\frac{dV}{dx_n} - V\frac{dU_0}{dx_n}\right) = \theta_n;$$

ces équations peuvent s'écrire encore:

$$d\left(\frac{V}{U_0}\right) = \frac{\theta_1 dx_1 + \theta_2 dx_2 + \ldots + \theta_n dx_n}{HU_0^2}.$$

Posons:

$$\frac{\theta_k}{U_0^2} = A_k \frac{dH}{dx_k} + B_k H,$$

l'expression:

$$\sum \left(\frac{A_k}{H}\frac{dH}{dx_k} + B_k\right) dx_k$$

devra être une différentielle exacte ce qui entraîne l'identité:

$$0 = (A_2 - A_1)\frac{dH}{dx_1}\frac{dH}{dx_2} + (A_1 - A_2) H \frac{d^2 H}{dx_1\, dx_2} + H\left(\frac{dA_1}{dx_2}\frac{dH}{dx_1} - \frac{dA_2}{dx_1}\frac{dH}{dx_2}\right)$$
$$+ H^2\left(\frac{dB_1}{dx_2} - \frac{dB_2}{dx_1}\right).$$

Cette équation nous montre d'abord que pour $H = 0$; on a $A_1 = A_2$ et de même:

$$A_1 = A_2 = \ldots = A_n.$$

Comme les $A_k$ sont arbitraires pourvu qu'ils se réduisent à $\frac{\theta_k}{U_0^2}$ pour $H = 0$, nous pourrons supposer que tous les $A_k$ sont égaux et supprimer l'indice $k$; notre équation devient alors en divisant par $H$:

$$\frac{dA}{dx_1}\frac{dH}{dx_2} - \frac{dA}{dx_2}\frac{dH}{dx_1} + H\left(\frac{dB_1}{dx_2} - \frac{dB_2}{dx_1}\right) = 0;$$

ce qui montre que l'on peut regarder $A$ comme une constante; car si l'on a $H = 0$, $dH = 0$, il vient $dA = 0$.

Il vient alors:

$$d\left(\frac{V}{U_0}\right) = A d \log H + B_1 dx_1 + B_2 dx_2 + \ldots + B_n dx_n.$$

Comme il est aisé de vérifier que les $B$ ne peuvent être que des fonctions holomorphes des $x$, nous déduirons:

$$V = A U_0 \log H + \text{ fonction holomorphe des } x.$$

Il nous reste à voir quelle est la signification de cette variété $H = 0$, qui joue un grand rôle dans l'analyse précédente.

L'équation

$$r^2 = 0$$

est l'équation d'une variété à $n - 1$ dimensions que j'appelle $K$ et qu'on peut assimiler à un cône ayant son sommet en un point $P$ de la variété attirante $v$. La variété $K$ est le lieu des points dont la distance à $P$ est nulle; elle est donc imaginaire et n'a d'autre point réel que le point $P$ lui même.

Quand le point $P$ se déplace sur la variété $v$, la variété $K$ se déplace également et son enveloppe s'obtient en éliminant les $t$ entre les équations (5); c'est donc la variété à $n - 1$ dimensions

$$H = 0.$$

Cette variété est donc imaginaire et n'a d'autres points réels que ceux de $v$.

Considérons une fonction holomorphe $F$ de $n$ variables complexes

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n$$

et considérons les $x$ et les $y$ comme les coordonnées d'un point dans l'espace à $2n$ dimensions.

L'équation $F = 0$ se décompose en deux autres obtenues en égalant à zéro la partie réelle et la partie imaginaire de $F$; elle définit ainsi une variété à $2n - 2$ dimensions que j'appelle $v$.

Nous verrons plus loin que la fonction

$$\log |F|$$

est égale au potentiel de la variété attirante $v$ plus une fonction holomorphe des $x$ et des $y$.

Nous devrons donc avoir:

$$\log |F| = U_0 \log H + \Phi,$$

$U_0$, $H$ et $\Phi$ étant des fonctions holomorphes des $x$ et des $y$.

L'équation $|F| = 0$ doit donc coïncider avec l'équation $H = 0$. L'équation $|F| = 0$ représente une variéte à $2n - 1$ dimensions qui est imaginaire et dont les seuls points réels sont les points de la variété à $2n - 2$ dimensions $v$.

Vérifions donc que la variété $|F| = 0$ est bien l'enveloppe des variétés $r^2 = 0$.

Observons d'abord que, si nous laissons de côté les points singuliers, nous pouvons écrire·

$$F = (z_n - f)\Phi$$

où $f$ est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ et où $\Phi$ est une fonction holomorphe de $z_1, z_2, \ldots, z_n$ qui ne s'annule pas dans le voisinage du point considéré.

Soit

$$f = f_1 + if_2$$

de sorte que $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions holomorphes de

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1};$$

les coefficients des développements de ces fonctions holomorphes étant réels.

La variété à $2n - 2$ dimensions $v$ a pour équations:

$$x_n = f_1, \qquad y_n = f_2$$

et la variété imaginaire à $2n - 1$ dimensions $|F| = 0$ a pour équations:

$$(x_n - f_1) + i(y_n - f_2) = 0. \tag{8}$$

Cela posé soit $x'_1, x'_2, \ldots, x'_n, y'_1, y'_2, \ldots, y'_n$ un point de $v$, la variété correspondante $r^2 = 0$ a pour équation

$$\Sigma(x_k - x'_k)^2 + \Sigma(y_k - y'_k)^2 = 0. \tag{9}$$

Il faut chercher l'enveloppe de cette variété, en faisant varier

$$x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n-1},$$
$$y'_1, y'_2, \ldots, y'_{n-1},$$

et en même temps $x'_n$ et $y'_n$ puisque l'on a:

$$x'_n = f_1(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_{n-1}),$$
$$y'_n = f_2(x'_1, y'_1, \ldots, x'_{n-1}, y'_{n-1}),$$

On trouve ainsi par la différentiation de (9)

$$(x_k - x'_k) + (x_n - x'_n)\frac{dx'_n}{dx'_k} + (y_n - y'_n)\frac{dy'_n}{dx_k} = 0,$$
$$(y_k - y'_k) + (x_n - x'_n)\frac{dx'_n}{dy'_k} + (y_n - y'_n)\frac{dy'_n}{dy'_k} = 0. \qquad (k=1,2,\dots,n-1)$$

A cause des relations:

$$\frac{dx'_n}{dx'_k} = \frac{dy'_n}{dy'_k}, \qquad \frac{dx'_n}{dy'_k} = -\frac{dy'_n}{dx'_k}$$

il vient:

$$(x_k - x'_k) + i(y_k - y'_k) = \left(\frac{dx'_n}{dx'_k} - i\frac{dy'_n}{dx'_k}\right)[(x_n - x'_n) + i(y_n - y'_n)]$$

et en combinant avec (9)

$$(x_k - x'_k) + i(y_k - y'_k) = (x_n - x'_n) + i(y_n - y'_n) = 0.$$

On a donc:

$$x_n + iy_n = x'_n + iy'_n = f(x'_1 + iy'_1, x'_2 + iy'_2, \dots, x'_{n-1} + iy'_{n-1}).$$

Or

$$x'_k + iy'_k = x_k + iy_k.$$

Donc:

$$x_n + iy_n = f(x_1 + iy_1, x_2 + iy_2, \dots, x_{n-1} + iy_{n-1})$$

de sorte qu'on retrouve l'équation (8).

C. Q. F. D.

## § 6. *Généralisation du théorème 4.*

Soit dans l'espace à $n$ dimensions une variété $S$ à $n - 1$ dimensions; supposons que cette variété soit fermée et limite un domaine $G$.

Soit maintenant $C$ une variété analytique à $n - 2$ dimensions; nous mettrons les équations de la variété $C$ sous la forme suivante:

(1) $$x_k = \varphi_k(t_1, t_2, \dots, t_{n-2}). \qquad (k=1,2,\dots,n)$$

Cela posé, considérons les hypersphères de rayon $\varepsilon$ ayant pour centre un point de $C$. L'équation générale de ces hypersphères sera:

(2) $$\Sigma(x_k - \varphi_k)^2 = \varepsilon^2$$

et cette équation contient $n - 2$ paramètres arbitraires qui sont les $t$. Pour avoir l'enveloppe de ces hypersphères, il suffit de différentier l'équation (2) par rapport aux paramètres $t$, ce qui nous donne les $n - 2$ équations:

(3) $$\sum (x_k - \varphi_k) \frac{d\varphi_k}{dt_h} = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n-2)}$$

En éliminant les $t$ entre les équations (2) et (3) on obtiendrait l'équation d'une variété à $n - 1$ dimensions que j'appelle $K$ et qui est une sorte de »variété-canal».

Posons

$$x_k - \varphi_k = \alpha_k \varepsilon \cos\theta + \beta_k \varepsilon \sin\theta$$

et cherchons à choisir les $\alpha$ et les $\beta$ de telle façon que les équations (2) et (3) soient satisfaites quel que soit $\theta$; nous obtiendrons les équations suivantes qui définissent les $\alpha$ et les $\beta$

(4) $$\Sigma\alpha^2 = \Sigma\beta^2 = 1, \qquad \Sigma\alpha\beta = 0,$$
$$\sum \alpha \frac{d\varphi}{dt_h} = \sum \beta \frac{d\varphi}{dt_h} = 0. \qquad {\scriptstyle (h=1,2,\ldots,n-2)}$$

Je dis que les cosinus directeurs de l'élément de surface de $K$, c'est à dire les quantités que j'ai appelées

$$\frac{D_k}{D_0}$$

au paragraphe 2 sont égales a

$$\frac{x_k - \varphi_k}{\varepsilon} = \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta.$$

Pour cela il suffit de vérifier que l'on a:

$$\sum \left(\frac{x_k - \varphi_k}{\varepsilon}\right)^2 = 1$$

et en outre

$$\frac{x_1 - \varphi_1}{D_1} = \frac{x_2 - \varphi_2}{D_2} = \ldots = \frac{x_n - \varphi_n}{D_n}$$

ou ce qui revient au même:

$$(5)\qquad \begin{aligned} &\sum (x_k - \varphi_k)\frac{dx_k}{d\theta} = 0, \\ &\sum (x_k - \varphi_k)\frac{dx_k}{dt_h} = 0. \qquad (h=1,2,\ldots,n-2) \end{aligned}$$

Ces conditions sont évidemment remplies, car en différentiant (2) on trouve

$$\sum (x_k - \varphi_k)\frac{d(x_k - \varphi_k)}{dt_h} = 0, \qquad \sum (x_k - \varphi_k)\frac{dx_k}{d\theta} = 0$$

et en combinant avec (3) on retrouve (5).

On déduit de là:

$$D_0 = \Sigma(\alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta) D_k$$

c'est à dire que $D_0$ est égal au déterminant:

$$\left| \frac{dx_k}{dt_1}, \frac{dx_k}{dt_2}, \ldots, \frac{dx_k}{dt_{n-2}}, \frac{dx_k}{d\theta}, \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta \right|. \qquad (k=1,2,\ldots,n)$$

Or on a:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{dt} + \varepsilon\left(\frac{d\alpha_k}{dt}\cos\theta + \frac{d\beta_k}{dt}\sin\theta\right)$$

et comme $\varepsilon$ est très petit, on peut écrire:

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{d\varphi_k}{dt}.$$

Il vient donc, en négligeant $\varepsilon^2$:

$$D_0 = \left| \frac{d\varphi_k}{dt_1}, \frac{d\varphi_k}{dt_2}, \ldots, \frac{d\varphi_k}{dt_{n-2}}, \varepsilon(-\alpha_k \sin\theta + \beta_h \cos\theta), \alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta \right|$$

ou bien:

$$D_0 = \varepsilon \left| \frac{d\varphi_k}{dt_1}, \frac{d\varphi_k}{dt_2}, \ldots, \frac{d\varphi_k}{dt_{n-2}}, \beta_k, \alpha_k \right|.$$

Remplaçons les lignes $m^e$ et $p^e$ du déterminant par deux lignes ainsi obtenues; l'une sera obtenue en multipliant la 1ère ligne par $\alpha_1$, la 2de par $\alpha_2, \ldots$, la $n^e$ par $\alpha_n$, et ajoutant; l'autre en multipliant la 1ère ligne par $\beta_1$, la 2de par $\beta_2, \ldots$, la $n^e$ par $\beta_n$ et ajoutant.

Le déterminant se trouve ainsi multiplié par

$$\alpha_m \beta_p - \alpha_p \beta_m.$$

En tenant compte des équations (4) on voit que tous les éléments des deux lignes nouvelles sont égaux à 0 ou à 1 et on conclut:

$$(\alpha_m \beta_p - \alpha_p \beta_m) D_0 = \varepsilon \Delta_{m \cdot p}$$

$\Delta_{m.p}$ étant le mineur obtenu en supprimant les deux dernières colonnes et les lignes $m$ et $p$.

On a $\frac{n(n-1)}{2}$ équations de cette forme. En faisant la somme des carrés, et remarquant que

$$\Sigma(\alpha_m \beta_p - \alpha_p \beta_m)^2 = 1,$$

on trouve:

$$D_0^2 = \varepsilon^2 \Sigma \Delta_{mp}^2.$$

Nous poserons:

$$\Sigma \Delta_{mp}^2 = \Delta_0^2$$

et il viendra, aux quantités près de l'ordre de $\varepsilon^2$:

$$D_0 = \varepsilon \Delta_0.$$

L'aire de la variété $C$ est donc représentée par l'intégrale $n - 2^{\text{ple}}$

$$\int \Delta_0 dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2}$$

et celle de $K$ (en négligeant $\varepsilon^2$) par l'intégrale $n - 1^{\text{ple}}$

$$\varepsilon \int \Delta_0 dt_1 dt_2 \dots dt_{n-2} d\theta.$$

Il nous faut distinguer quels seront les parties de la variété-canal $K$ qui conviennent. Nous ne conserverons de cette variété que les points qui satisferont aux deux conditions suivantes:

1° Ils seront à l'intérieur de $S$,

1° Leur plus courte distance à $C$ sera précisément $\varepsilon$, et non pas plus petite que $\varepsilon$.

Les circonstances suivantes peuvent en effet se présenter:

1° Il peut arriver que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ soit à l'extérieur de $S$ tandis que le point correspondant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ est à l'intérieur de $S$.

2° Il peut arriver au contraire que le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ soit à l'intérieur de $S$ tandis que le point correspondant $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ sera à l'extérieur de $S$.

3° Il peut arriver enfin que l'on puisse du point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mener deux normales à $C$, l'une égale à $\varepsilon$, l'autre plus petite que $\varepsilon$, de telle façon que ce point appartienne à $K$, mais que sa plus courte distance à $C$ soit cependant plus petite que $\varepsilon$.

Soit $K_1$ la portion de $K$ formée par les points $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tels que les points correspondants $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ soient à l'intérieur de $S$. La portion de $K$ qui convient au problème sera alors

$$K_1 - k + k' - k'':$$

$k$, lieu des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont extérieurs à $S$, mais tels que les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ correspondants soient intérieurs à $S$.

$k'$, lieu des points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ qui sont intérieurs à $S$, mais tels que les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ correspondants soient extérieurs à $S$.

$k''$, lieu des points d'où l'on peut mener à $C$ deux normales, l'une égale à $\varepsilon$, l'autre plus petite que $\varepsilon$.

Je dis que l'aire totale de $k, k'$ et $k''$ est de l'ordre de $\varepsilon^2$.

Démontrons-le d'abord pour $k$ et $k'$.

Si les deux points $x_1, x_2, \ldots, x_n$ et $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ sont l'un extérieur et l'autre intérieur à $S$, comme la distance de ces deux points est $\varepsilon$, la plus courte distance de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ à $S$ sera plus petite que $\varepsilon$. Considérons la partie de $C$ formée par les points $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ dont la plus courte distance à $S$ est plus petite que $\varepsilon$. Son aire, représentée par l'intégrale

$$\int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots . dt_n$$

sera, je suppose, égale à $A$. L'aire de $k + k'$, représentée par l'intégrale

$$\varepsilon \int \Delta_0 dt_1 dt_2 \ldots dt_n d\theta$$

sera alors plus petite que

$$2\pi\varepsilon A.$$

Je dis que $A$ est de l'ordre de $\varepsilon$.

Pour nous en rendre compte, supposons par exemple que la variété $S$ soit une hypersphère

$$(x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 = \rho^2$$

et faisons varier $\rho$.

Soit $F(\rho)$ l'aire de la partie de la variété $C$ contenue à l'intérieur de cette hypersphère.

Nous allons faire varier $\rho$ depuis o jusqu'à $\rho_0$ par exemple; cet intervalle va pouvoir se partager en un nombre fini d'intervalles partiels de telle sorte que dans chacun de ces intervalles partiels, $F(\rho)$ soit une fonction analytique de $\rho$.

Si nous donnons à $\rho$ une valeur comprise à l'intérieur d'un de ces intervalles, $A$ sera égal à

$$F(\rho + \varepsilon) - F(\rho - \varepsilon)$$

et comme la fonction $F$ est analytique, $A$ sera de l'ordre de $\varepsilon$.

On peut d'ailleurs éviter cette difficulté par l'artifice suivant.

Soit $C'$ l'intersection de $C$ et de $S$; c'est une variété à $n - 3$ dimensions. Soit $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un point de $C'$; $\alpha_k$ et $\beta_k$ les valeurs correspondantes des coefficients $\alpha$ et $\beta$ définis plus haut.

Considérons l'ensemble des points:

$$x_k = \varphi_k + \zeta(\alpha_k \cos\theta + \beta_k \sin\theta)$$

où les $\varphi_k$ (ainsi que les $\alpha_k$ et les $\beta_k$) prennent toutes les valeurs qui correspondent aux différents points de $C'$; où $\theta$ varie de o à $2\pi$ et $\zeta$ de o à $\varepsilon$.

Cet ensemble de points formera une variété $W$ à $n - 1$ dimensions qui s'écartera peu de $S$, puisque le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ est sur $S$ et que $\zeta$ est très petit.

Remplaçons $S$ par une variété $S'$ peu différente, mais comprenant la variété $W$; il n'y aura plus alors d'aires $k$ et $k'$; car si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ est à l'intérieur de $S'$, il en est de même du point

correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ et inversement. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que lorsque le point $\varphi_k$ de $C$ traverse $S'$, il est sur $C'$ et par conséquent le point correspondant $x_k$ est sur $W$ et par conséquent sur $S'$, puisque $W$ fait partie de $S'$.

Passons maintenant à $k''$; je dis que l'aire de $k''$ sera très petite, non seulement d'une manière absolue, mais par rapport à $\varepsilon$.

En effet l'équation de la variété-canal $K$ peut pour $\varepsilon$ très petit se mettre sous la forme suivante.

Soient

$$F = 0, \qquad F_1 = 0$$

les équations de la variété $C$; l'équation de $K$ s'écrira en négligeant les puissances supérieures de $\varepsilon$:

$$F^2 \sum \left(\frac{dF_1}{dx}\right)^2 - 2FF_1 \sum \left(\frac{dF}{dx}\frac{dF_1}{dx}\right) + F_1^2 \sum \left(\frac{dF}{dx}\right)^2$$
$$= \varepsilon^2 \sum \left(\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dx_k} - \frac{dF_1}{dx_k}\frac{dF}{dx_i}\right)^2.$$

Cette variété ne présentera pas de singularité à moins que tous les déterminants

$$\frac{dF_1}{dx_i}\frac{dF}{dx_k} - \frac{dF_1}{dx_k}\frac{dF}{dx_i}$$

ne s'annulent à la fois. Si cela n'a pas lieu, dans un certain domaine on est donc certain que deux nappes de la variété $K$ ne peuvent pas se couper dans ce domaine, et par conséquent que ce domaine ne contient aucune partie de $k''$.

L'ensemble des points de $C$ tels que tous ces déterminants s'annulent forme une variété singulière $C''$ qui aura au plus $n - 3$ dimensions.

Si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ n'est pas sur $C''$, nous pourrons choisir $\varepsilon$ assez petit pour être certains que le point correspondant $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$ de $K$ n'est pas sur $k''$.

Soit alors $C_1$ l'ensemble des points de $C$ dont la plus courte distance à $C'$ est plus petite que $\delta$. Nous pourrons prendre $\varepsilon$ assez petit pour que si le point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ n'est pas sur $C_1$, nous soyons certains que le point correspondant $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de $K$ ne sera pas sur $k''$. Il

est à remarquer que la valeur que l'on doit attribuer à $\varepsilon$ doit être d'autant plus petite que $\delta$ est plus petit.

Soit $A$ l'aire de $C_1$, elle sera de l'ordre de $\delta$. L'aire de $k''$ sera plus petite que $2\pi\varepsilon A$. Elle sera donc de l'ordre de $\varepsilon\delta$. Quand $\delta$ et par conséquent $\varepsilon$ tendent vers zéro, on voit que le rapport de l'aire de $k''$ à $\varepsilon$ tend vers o. C. Q. F. D.

Envisageons maintenant une fonction $V$ jouissant des propriétés suivantes:

1° Elle est harmonique à l'intérieur de la variété $S$, sauf sur la variété $C$.

2° Quand le point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ est à une distance $\varepsilon$ de la variété $C$, elle est de l'ordre de $\log\varepsilon$

3° En même temps ses dérivées premières sont de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

4° Considérons un point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ de $C$ et un point $x_1, x_2, \ldots, x_n$ très voisin du premier, et tel que l'on ait:

$$x_k - \varphi_k = \alpha_k\varepsilon\cos\theta + \beta_k\varepsilon\sin\theta,$$

les $\alpha_k$ et les $\beta_k$ étant les coefficients définis plus haut et correspondant au point $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$; je supposerai que l'expression

$$(x_1 - \varphi_1)\frac{dV}{dx_1} + (x_2 - \varphi_2)\frac{dV}{dx_2} + \ldots + (x_n - \varphi_n)\frac{dV}{dx_n}$$

tend vers une limite finie indépendante de $\theta$ quand $\varepsilon$ tend vers o.

Cette limite que j'appellerai $\delta$ est évidemment une fonction des coordonnées $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ du point considéré de $C$.

Cela posé, soit

$$y_1, y_2, \ldots, y_n$$

un point quelconque intérieur à $S$. Posons

$$r^2 = \Sigma(x_k - y_k)^2, \qquad U = \frac{1}{r^{n-2}}.$$

Soit ensuite $\Sigma$ l'hypersphère

$$\Sigma(x_k - y_k)^2 = \varepsilon^2.$$

Dans le domaine limité par la variété $S$, par l'hypersphère $\Sigma$ et par la variété-canal $K$, les deux fonctions $V$ et $U$ sont harmoniques, nous pouvons donc appliquer le théorème de Green et écrire:

$$\int \left( V \frac{dU}{d\nu} - U \frac{dV}{d\nu} \right) d\omega = 0,$$

les intégrales étant prises le long des variétés qui limitent le domaine, c'est ce que je mettrai en évidence en écrivant l'équation qui précède sous la forme suivante:

$$\int_{S_1} + \int_K + \int_\Sigma = 0$$

ou bien encore:

$$\int_{S_1} + \int_{K_1} - \int_k + \int_{k'} - \int_{k''} + \int_\Sigma = 0;$$

$S_1$ représente ici la partie de $S$ qui est extérieure à $K$.

Je vais maintenant faire tendre $\varepsilon$ vers 0.

Je dis que $\int_{S_1}$ tend vers une limite finie et déterminée que j'appellerai $\int_S$. En effet la variété $S$ a $n-1$ dimensions, l'intersection de $C$ et de $S$ en a $n-3$; l'aire de $S - S_1$ (c'est à dire de l'ensemble des points de $S$ dont la distance à $C$ est plus petite que $\varepsilon$) sera donc de l'ordre de $\varepsilon^2$. Si nous changeons $\varepsilon$ en $\varepsilon'$, $\varepsilon'$ étant plus petit que $\varepsilon$ et tel que la différence $\varepsilon - \varepsilon'$ soit très petite par rapport à $\varepsilon$, si nous appelons $s$ l'ensemble des points de $S$ dont la distance à $C$ est comprise entre $\varepsilon$ et $\varepsilon'$; l'aire de $s$ sera de l'ordre de $\varepsilon(\varepsilon - \varepsilon')$; de plus dans $s$, les fonctions $U$ et $\frac{dU}{d\nu}$ sont finies, tandis que $V$ et $\frac{dV}{d\nu}$ sont de l'ordre de $\log \varepsilon$ et de $\frac{1}{\varepsilon}$. L'intégrale $\int_s$ est donc de l'ordre de $\varepsilon - \varepsilon'$. Nous en concluons que l'intégrale

$$\int_S \left( V \frac{dU}{d\nu} - U \frac{dV}{d\nu} \right) d\omega$$

et même l'intégrale

$$\int\limits_{S}\left(\left|V\frac{dU}{d\nu}\right|+\left|U\frac{dV}{d\nu}\right|\right)d\omega$$

sont finies.

De plus d'après les théorèmes 2 et 3 généralisés la première intégrale est une fonction holomorphe et harmonique des $y$.

Ainsi quand $\varepsilon$ tend vers 0, l'intégrale $\int\limits_{S_1}$ tend vers une fonction holomorphe et harmonique des $y$.

En même temps, les intégrales $\int\limits_{k}$, $\int\limits_{k'}$, $\int\limits_{k''}$ tendent vers 0; en effet les aires d'intégration $k$, $k'$ et $k''$ sont très petites par rapport à $\varepsilon$ et la fonction sous le signe $\int$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Passons à l'intégrale $\int\limits_{\Sigma}$. L'aire de $\Sigma$ est proportionnelle à $\varepsilon^{n-1}$. A la surface de $\Sigma$, $V$ et $\frac{dV}{d\nu}$ sont finis; $U$ est égal à $\frac{1}{\varepsilon^{n-2}}$ et $\frac{dU}{d\nu}$ à $\frac{n-2}{\varepsilon^{n-1}}$. Donc quand $\varepsilon$ tend vers 0,

$$\varepsilon^{n-1}\left(V\frac{dU}{d\nu}-U\frac{dV}{d\nu}\right)$$

tend vers $(n-2)V_0$, $V_0$ étant la valeur de $V$ au point de $y_1, y_2, \ldots, y_n$, c'est à dire au centre de $\Sigma$.

La limite de l'intégrale $\int\limits_{\Sigma}$ est donc égale à $V_0$ multipliée par un facteur constant numérique.

Reste l'intégrale $\int\limits_{K_1}$. Elle est égale à

$$2\pi\varepsilon\int\left(V\frac{dU}{d\nu}-U\frac{dV}{d\nu}\right)d\tau$$

en représentant par

$$\int d\tau=\int\Delta_0 dt_1 dt_2\ldots dt_{n-2}$$

l'aire de $C$.

$V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$ et $\frac{dU}{d\nu}$ est fini, donc

$$\varepsilon V \frac{dU}{d\nu}$$

tend vers zéro. D'autre part $U$ est égal à $r^{2-n}$ et

$$\varepsilon \frac{dV}{d\nu} = \sum (x_k - \varphi_k) \frac{dV}{dx_k}$$

tend vers $\delta$. Donc l'intégrale $\int_{K_1}$ tend vers

$$-2\pi \int \frac{\delta dt}{r^{n-2}},$$

$r$ désignant la distance de l'élément $d\tau$ au point $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

C'est le potentiel d'une variété attirante à $n-2$ dimensions, au point $y_1, y_2, \ldots, y_n$. La variété attirante est $C$ et la densité de la matière attirante est $\delta$.

Notre équation devient ainsi:

$$\int_S -2\pi \int \frac{\delta dt}{r^{n-2}} + CV_0 = 0,$$

$C$ étant un coefficient constant.

Nous arrivons donc à l'énoncé suivant qui est la généralisation de notre théorème 4:

*Notre fonction $V$ est, dans le domaine considéré, égale au potentiel de la variété attirante $C$, plus une fonction holomorphe et harmonique.*

On pourrait dans la démonstration précédente, remplacer la variété-canal $K_1$ par d'autres variétés très peu différentes et qui joueraient le même rôle.

Nous en verrons un exemple dans le paragraphe suivant.

### § 7. *Applications aux fonctions logarithmiques.*

Soit $F$ une fonction des $n$ variables complexes:

$$z_1 = x_1 + iy_1, \quad z_2 = x_2 + iy_2, \quad \ldots, \quad z_n = x_n + iy_n$$

holomorphe dans un certain domaine $G$.

La fonction

$$V = \log|F|$$

sera une fonction biharmonique des $2n$ variables $x$ et $y$ dans tout ce domaine sauf sur la variété à $2n - 2$ dimensions

$$F = 0,$$

variété que j'appellerai $C$ dans ce qui va suivre.

J'appellerai $S$ la variété à $2n - 1$ dimensions qui limite le domaine $G$.

Nous pourrions en partant de la variété $C$, construire, comme dans le paragraphe précédent, une variété-canal $K$ à $2n - 1$ dimensions qui serait l'enveloppe des hypersphères dont le rayon serait $\varepsilon$ et dont le centre serait sur $C$.

J'envisagerai ensuite une hypersphère $\Sigma$ dont le centre sera un point quelconque de $G$ et dont le rayon sera $\varepsilon$. Je désignerai par $P$ le centre de cette hypersphère.

Je désignerai par $M$ le point de coordonnées courantes

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_n, y_n$$

et par $r$ la distance $MP$.

J'ai déjà posé

$$V = \log|F|;$$

je pose de même

$$U = \frac{1}{r^{2n-2}}.$$

La fonction $U$ a même définition qu'au paragraphe précédent; il me reste à montrer que la fonction $V$ satisfait bien aux mêmes conditions que dans le paragraphe précédent.

1° Quand le point $M$ est à la distance $\varepsilon$ de la variété $C$, $V$ de l'ordre de $\log \varepsilon$.

Soit en effet

$$x'_1, y'_1, x'_2, y'_2, \ldots, x'_n, y'_n$$

un point quelconque $M'$ de la variété $C$.

Je poserai d'ailleurs:

$$x'_k + iy'_k = z'_k.$$

Si le point $M'$ n'est pas singulier, c'est à dire si en ce point $\frac{dF}{dz_n}$ s'annule pas; nous pourrons poser:

$$F = (z_n - H)\theta.$$

$H$ est une série développée suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_{n-1} - z'_{n-1}$$

et se réduit à $z'_n$ quand tous les $z_k$ deviennent égaux à $z'_k$.

$\theta$ est une série développée suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_n - z'_n$$

et ne s'annule pas quand tous les $z_k$ deviennent égaux à $z'_k$.

Supposons maintenant que le point $M'$ soit singulier; je suppose qu'en ce point $\frac{dF}{dz_n}$ s'annule, mais cependant que toutes les dérivées cessives de $F$ par rapport à $z_n$ ne s'annulent pas à la fois. Par ex pour fixer les idées, je supposerai:

$$\frac{dF}{dz_n} = \frac{d^2F}{dz_n^2} = 0; \qquad \frac{d^3F}{dz_n^3} \gtrless 0.$$

Alors nous pourrons poser:

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\theta.$$

$\theta$ conserve la même signification. Les séries $H_2$, $H_1$, $H_0$ so $H$ développées suivant les puissances de

$$z_1 - z'_1, z_2 - z'_2, \ldots, z_{n-1} - z'_{n-1}.$$

Quand tous les $z_k$ deviennent égaux à $z'_k$, le polynôme

$$z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0$$

se réduit à

$$(z_n - z'_n)^3.$$

Tout cela résulte des théorèmes cités plus haut et qui se trouvent soit dans les oeuvres de WEIERSTRASS, soit au début de ma thèse.

Reste le cas où toutes les dérivées $\frac{d^k F}{dz_n^k}$ sont nulles à la fois. Mais ce cas se ramène au précédent. Il suffit de faire un changement linéaire de variables; et on peut toujours le faire de telle façon que toutes les dérivées de $F$ par rapport à l'une des nouvelles variables ne s'annulent pas à la fois. Car nous ne supposons pas que $F$ soit identiquement nul. Qu'on se reporte d'ailleurs au dernier des théorèmes de la partie citée de ma thèse.

Cela posé, plaçons-nous d'abord dans le premier cas; celui où:

$$F = (z_n - H)\theta.$$

Considérons le point de coordonnées courantes $M$ dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, z_2, \ldots, z_n.$$

Considérons le point $M''$ dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, \qquad H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}).$$

La distance $MM''$ est précisément

$$|z_n - H|.$$

Nous aurons alors:

$$V = \log|z_n - H| + \log|\theta|;$$

le second terme est fini, le premier est négatif et très grand; il est égal à $\log MM''$.

Mais comme $\varepsilon$ représente la plus courte distance de $M$ à $C$ et que $M''$ est sur $C$, on a

$$MM'' > \varepsilon$$

et par conséquent

$$|\log MM''| < |\log \varepsilon|.$$

Donc $V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$. C. Q. F. D.

Passons au second cas où:

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\,\theta.$$

Soient $h_1$, $h_2$, $h_3$ les trois racines de l'équation:

$$z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0 = 0.$$

Soient $M_1''$, $M_2''$, $M_3''$ les trois points dont les coordonnées sont les parties réelles et imaginaires de

$$z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\,,\, z_{n-1}\,,\, h_1,$$

$$z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\,,\, z_{n-1}\,,\, h_2,$$

$$z_1\,,\, z_2\,,\, \ldots\,,\, z_{n-1}\,,\, h_3.$$

Ces trois points sont sur $C$ et l'on aura:

$$|z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0| = MM_1'' \times MM_2'' \times MM_3''$$

d'où:

$$V = \log(MM_1''.\,MM_2''.\,MM_3'') + \log|\theta|.$$

Le second terme est fini.

Quand au premier il est plus petit en valeur absolue que

$$3 \log \varepsilon;$$

car les points $M_1''$, $M_2''$, $M_3''$ étant sur $C$, on a:

$$MM_1'' > \varepsilon, \qquad MM_2'' > \varepsilon, \qquad MM_3'' > \varepsilon.$$

Donc $V$ est de l'ordre de $\log \varepsilon$. C. Q. F. D.

2° Les dérivées premières de $V$ sont de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

Ces dérivées premières sont les parties réelles et imaginaires de

$$\frac{d\log F}{dz_1}, \frac{d\log F}{dz_2}, \ldots, \frac{d\log F}{dz_n}.$$

Nous pouvons toujours supposer que toutes les dérivées successives de $F$ par rapport à $z_n$ ne s'annulent pas à la fois, non plus que toutes les dérivées par rapport à $z_1$, non plus que toutes les dérivées successives par rapport à $z_2$, etc.

Car, ainsi que je l'ai dit plus haut, s'il n'en était pas ainsi, on n'aurait qu'à faire un changement linéaire de variables.

Il suffira d'ailleurs de démontrer la proposition énoncée pour $\frac{d\log F}{dz_n}$; si l'on a:

$$F = (z_n - H)\theta$$

il vient:

$$\frac{d\log F}{dz_n} = \frac{1}{z_n - H} + \frac{d\log\theta}{dz_n}.$$

Le second terme est fini et le premier a son module égal à $\frac{1}{MM''}$ et par conséquent plus petit que $\frac{1}{\varepsilon}$.

Si l'on a:

$$F = (z_n^3 + H_2 z_n^2 + H_1 z_n + H_0)\,\theta = (z_n - h_1)(z_n - h_2)(z_n - h_3)\,\theta$$

il vient:

$$\frac{d\log F}{dz_n} = \frac{1}{z_n - h_1} + \frac{1}{z_n - h_2} + \frac{1}{z_n - h_3} + \frac{d\log\theta}{dz_n}.$$

Le dernier terme est fini et les trois autres ont leurs modules égaux à

$$\frac{1}{MM_1''}, \frac{1}{MM_2''}, \frac{1}{MM_3''},$$

c'est à dire plus petits que $\frac{1}{\varepsilon}$.

Donc dans tous les cas le module de $\frac{d\log F}{dz_n}$ est de l'ordre de $\frac{1}{\varepsilon}$.

C. Q. F. D.

3° L'expression

$$E = \sum (x_k - x'_k)\frac{dV}{dx_k} + (y_k - y'_k)\frac{dV}{dx_k}$$

tend vers l'unité; quand le point $M'$ dont les coordonnées sont $x'_k$ et $y'_k$ est sur la variété $C$; quand la distance de $M'$ au point $M$ dont les coordonnées sont $x_k$ et $y_k$ tend vers 0; quand enfin la droite $MM'$ est normale à la variété $C$.

Exprimons d'abord que la droite $MM'$ est normale à la variété $C$. Nous aurons les équations suivantes:

$$\frac{z_1 - z'_1}{A_1^0} = \frac{z_2 - z'_2}{A_2^0} = \ldots = \frac{z_n - z'_n}{A_n^0} = \tau$$

qui correspondent aux équations (3) du paragraphe précédent.

Dans ces équations $A_k^0$ a la signification suivante. Soit $A_k$ ce que devient $\frac{dF}{dz_k}$ quand on y remplace les $z_k$ par $z'_k$; $A_k^0$ sera l'imaginaire conjuguée de $A_k$.

D'autre part $E$ est la partie réelle de

$$J = \sum (z_k - z'_k)\frac{d \log F}{dz_k} = \frac{\tau}{F}\sum A_k^0 \frac{dF}{dz_k}.$$

La formule des accroissements finis nous donne ensuite

$$F = \Sigma B_k (z_k - z'_k),$$

$B_k$ étant une quantité complexe dont la partie réelle est comprise entre celle de $A_k$ et celle de $\frac{dF}{dz_k}$ et dont la partie imaginaire est comprise de même entre celles de $A_k$ et de $\frac{dF}{dz_k}$. En effet $F$ est nul pour $z_k = z'_k$ puisque le point $M'$ est sur $C$.

Il vient alors:

$$J = \frac{\tau}{\Sigma B_k (z_k - z'_k)}\sum A_k^0 \frac{dF}{dz_k} = \frac{\sum A_k^0 \frac{dF}{dz_k}}{\Sigma A_k^0 B_k}.$$

Quand la distance $MM'$ tend vers zéro, $\frac{dF}{dz_k}$ et $B_k$ tendent vers $A_k$ et $J$ tend vers 1.

Il en est donc de même de sa partie réelle $E$.

C. Q. F. D.

Ainsi la troisième condition imposée à $V$ dans le paragraphe précédent est remplie et la quantité $\delta$ est égale à 1.

Donc

*La fonction* $\log|F|$ *est égale dans le domaine $G$ à une fonction holomorphe et harmonique des $x$ et des $y$, plus le potentiel de la variété attirante $C$, la densité de la matière attirante étant égale à* 1.

*C'est là le théorème fondamental que je veux emprunter à la théorie du potentiel pour l'appliquer à la théorie des fonctions abéliennes.*

La démonstration du paragraphe précédent peut être un peu modifiée en substituant à la variété-canal $K$, une autre variété peu différente qui a pour équation:

$$|F| = \text{const.}$$

En effet résolvons l'équation:

$$F(z_1, z_2, \ldots, z_n) = F$$

par rapport à $z_n$ et supposons que l'on trouve ainsi:

$$z_n = H(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, F)$$

et faisons-y

$$F = |F| e^{i\theta}.$$

Soient $H'$ et $H''$ les parties réelles et imaginaires de $H$ de telle sorte que

$$x_n = H', \qquad y_n = H''.$$

Alors $x_n$ et $y_n$ vont se trouver exprimés en fonctions de

$$x_1, y_1, x_2, y_2, \ldots, x_{n-1}, y_{n-1}, \theta$$

de sorte que la quantité que nous avons appelée $D_0^2$ sera la somme des carrés des déterminants contenus dans la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{dx_n}{dx_1} & \frac{dx_n}{dy_1} & \frac{dx_n}{dx_2} & \frac{dx_n}{dy_2} & \frac{dx_n}{d\theta} \\ \frac{dy_n}{dx_1} & \frac{dy_n}{dy_1} & \frac{dy_n}{dx_2} & \frac{dy_n}{dy_2} & \frac{dy_n}{d\theta} \end{vmatrix}.$$

J'ai en écrivant cette matrice supposé $n = 3$ pour fixer les idées.

On en déduit:

$$D_0^2 = \sum \left(\frac{dx_n}{dx_k}\frac{dy_n}{d\theta} - \frac{dx_n}{d\theta}\frac{dy_n}{dx_k}\right)^2 + \sum \left(\frac{dx_n}{dy_k}\frac{dy_n}{d\theta} - \frac{dy_n}{dy_k}\frac{dx_n}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dx_n}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy_n}{d\theta}\right)^2$$

d'où:

$$D_0^2 = \left(1 + \sum \left|\frac{dz_n}{dz_k}\right|^2\right) \left|\frac{dz_n}{dF}\right|^2 |F|^2.$$

D'autre part nous aurons:

$$|F^2| \left(\frac{dV}{d\nu}\right)^2 = \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2.$$

Mais pour comparer cette formule avec la précédente, il importe de remarquer que dans l'une d'elles nous faisons entrer les dérivées partielles:

$$\frac{dz_n}{dF}, \quad \frac{dz_n}{dz_k}$$

en regardant $z_n$ comme fonction de $F$ et des $z_K$ et dans l'autre les dérivées

$$\frac{dF}{dz_k}, \quad \frac{dF}{dz_n}$$

en regardant $F$ comme fonction de $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Pour rendre les formules comparables, nous transformerons par les relations:

$$\frac{dF}{dz_k} + \frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{dz_k} = 0; \qquad \frac{dF}{dz_n}\frac{dz_n}{dF} = 1$$

ce qui donne:

$$D_0^2 = \frac{|F^2|}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^4} \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2.$$

Envisageons l'intégrale qui correspond à $\int\limits_K$, à savoir:

$$\int \left(U\frac{dV}{d\nu} - V\frac{dU}{d\nu}\right) D_0 dx_1 dy_1 dx_2 dy_2 \ldots dx_{n-1} dy_{n-1} d\theta.$$

Entre quelles limites faut-il prendre cette intégrale? Pour nous en rendre compte, observons que le domaine $G$ est arbitraire dans une très large mesure; nous pourrons le supposer défini par des inégalités de la forme suivante:

$$\alpha_1 < x_1 < \alpha'_1\,,\ \alpha_2 < x_2 < \alpha'_2\,,\ \ldots,\ \alpha_n < x_n < \alpha'_n,$$

$$\beta_1 < y_1 < \beta'_1\,,\ \beta_2 < x_2 < \beta'_2\,,\ \ldots,\ \beta_n < y_n < \beta'_n.$$

Nous pourrons toujours supposer que les constantes $\alpha$ et $\beta$ ont été choisies de telle sorte que si l'une des quantités $x_n$ ou $y_n$ atteint l'une de ses limites $\alpha_n, \alpha'_n, \beta_n$ ou $\beta'_n$; et que l'une des inégalités relatives à $x_n$ ou à $y_n$ soit remplacée par une égalité, le module $|F|$ restera supérieur à une certaine limite.

En effet donnons d'abord à $z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$ les valeurs

$$\alpha_1 + i\beta_1\,,\ \alpha_2 + i\beta_2\,,\ \ldots,\ \alpha_{n-1} + i\beta_{n-1};$$

nous pourrons choisir $\alpha_n, \beta_n, \alpha'_n$ et $\beta'_n$ de telle sorte que si nous considérons dans le plan de la variable $z_n$ le rectangle dont les côtés ont pour équations

$$x_n = \alpha_n, \qquad x_n = \alpha'_n, \qquad y_n = \beta_n, \qquad y_n = \beta'_n,$$

$F$ ne s'annule pas sur le périmètre de ce rectangle et s'annule à l'intérieur de ce rectangle.

Si ensuite $\alpha'_k$ est assez voisin de $\alpha_k$ et $\beta'_k$ assez voisin de $\beta_k$, $F$ ne s'annulera pas non plus quand $z_n$ décrira le périmètre de ce rectangle et quand en même temps $x_k$ variera de $\alpha_k$ à $\alpha'_k$ et $y_k$ de $\beta_k$ à $\beta'_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n-1)$. Ainsi se trouve justifiée l'hypothèse faite plus haut.

Dans ces conditions, les limites de l'intégration seront

$$\begin{aligned} &\alpha_k \text{ et } \alpha'_k \text{ pour } x_k, \\ &\beta_k \text{ et } \beta'_k \text{ pour } y_k, \qquad (k=1,2,\ldots,n-1) \\ &0 \text{ et } 2\pi \text{ pour } \theta, \end{aligned}$$

pourvu que $|F|$ soit plus petit que le plus bas module que puisse atteindre $F$ quand $z_n$ décrit le périmètre du rectangle dont il vient d'être question.

Cela posé l'intégrale:

$$\int \frac{dU}{d\nu} V D_0 dx_1 \ldots dy_{n-1} d\theta$$

tend vers zéro quand $|F|$ tend vers 0, et il nous suffira d'envisager l'intégrale:

$$\int U \frac{dV}{d\nu} D_0 dx_1 \ldots dy_{n-1} d\theta = \int \frac{U \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1} d\theta.$$

Quand $|F|$ tend vers zéro, la variété $|F| =$ const. tend à se confondre avec $C$ et la quantité sous le signe $\int$ tend vers la valeur qui correspond aux points de la variété $C$.

Elle devient donc indépendante de $\theta$, et en intégrant d'abord par rapport à $\theta$, notre intégrale devient:

$$2\pi \int \frac{U \sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1}.$$

Comparons-la avec l'intégrale qui représente l'aire de $C$.

Il est aisé de voir que cette intégrale est égale à:

$$\int \frac{\sum \left|\frac{dF}{dz_k}\right|^2}{\left|\frac{dF}{dz_n}\right|^2} dx_1 \ldots dy_{n-1} = \int d\omega.$$

Notre intégrale a donc pour limite:

$$2\pi\int U d\omega = 2\pi\int\frac{d\omega}{r^{2n-2}}$$

ce qui représente au facteur $2\pi$ près, le potentiel de la variété attirante $C$.

C. Q. F. D.

L'avantage de cette façon de procéder, c'est qu'on évite les difficultés relatives aux petites portions de variété appelées $k$, $k'$ et $k''$ dans le paragraphe précédent.

## § 8. *Application aux fonctions Abéliennes.*

Nous allons appliquer ce qui précède aux fonctions de $n$ variables méromorphes et $2n$ fois périodiques.

Qu'est-ce d'abord qu'une fonction méromorphe?

Voici les hypothèses que nous allons faire et que nous regardons comme constituant la définition d'une fonction méromorphe.

Il y aura dans l'espace à $2n$ dimensions une infinité de domaines $G$, distribués de telle façon que tout point de l'espace à $2n$ dimensions appartienne *au moins à un* de ces domaines.

Dans un domaine $G$, la fonction méromorphe pourra être représentée par le quotient de deux séries de puissances.

Je ne restreins pas la généralité en supposant que ces deux séries de puissances ne peuvent être l'une et l'autre divisible par une troisième série de même forme s'annulant à l'intérieur de $G$.

WEIERSTRASS a démontré en effet (oeuvres complètes, tome 2, page 151) que si deux séries de puissances $P_1$ et $P_2$ s'annulent en un certain point $M$, on peut toujours trouver trois autres séries $P_0$, $P'_1$, $P'_2$ telles que l'on ait:

$$P_1 = P_0 P'_1,$$

$$P_2 = P_0 P'_2,$$

et telles que les deux séries $P'_1$ et $P'_2$ n'admettent aucun diviseur commun s'annulant au point $M$.

Qu'arrive-t-il alors dans la partie commune à deux domaines $G$ et $G'$?

Dans le domaine $G$, la fonction méromorphe $F$ sera égale au quotient de deux séries $\frac{P}{Q}$; dans le domaine $G'$ au quotient de deux séries $\frac{P'}{Q'}$; dans la partie commune on aura;

$$\frac{P}{Q} = \frac{P'}{Q'}.$$

La variété $P = 0$ a $2n - 2$ dimensions; je dis que dans la partie commune $G$ et à $G'$, elle ne diffère pas de la variété $P' = 0$.

Supposons en effet, qu'en un point de cette partie commune, on ait $P' = 0$ sans avoir $P = 0$; soit

$$z_1 = a_1 \ , \ z_2 = a_2 \ , \ \ldots \ , \ z_n = a_n,$$

ce point que j'appellerai $M$. Je pourrai toujours supposer qu'en ce point toutes les dérivées successives de $P'$ par rapport à $z_n$ ne s'annulent pas à la fois, sans quoi je ferais un changement linéaire de variables. Imaginons par exemple

$$\frac{dP'}{dz_n} = \frac{d^2P'}{dz_n^2} = 0, \qquad \frac{d^3P'}{dz_n^3} \gtrless 0.$$

Alors on aura:

$$P' = [(z_n - a_n)^3 + H_1(z_n - a_n)^2 + H_2(z_n - a_n) + H_3]\,\theta = \Pi . \theta,$$

où les $H$ sont des séries ordonnées suivant les puissances de

$$z_1 - a_1 \ , \ z_2 - a_2 \ , \ \ldots \ , \ z_{n-1} - a_{n-1}$$

et s'annulant pour $z_k = a_k$, et où $\theta$ est une série ordonnée suivant les puissances des $z_k - a_k$ et ne s'annulant pas pour $z_k = a_k$.

Soit alors

$$\Pi = (z_n - a_n - h_1)(z_n - a_n - h_2)(z_n - a_n - h_3);$$

$h_1$, $h_2$ et $h_3$ seront des fonctions de

$$z_1 - a_1 \ , \ z_2 - a_2 \ , \ \ldots \ , \ z_{n-1} - a_{n-1}$$

s'annulant avec ces variables.

Quand on égalera $z_n$ à $a_n + h_1$, $a_n + h_2$, $a_n + h_3$; $P'$ sera nul et $P$ ne sera pas nul, donc $Q'$ devra s'annuler; donc $Q'$ est divisible par $\Pi$, ce qui est absurde puisque nous avons supposé que $P'$ et $Q'$ n'avaient pas de diviseur commun.

Donc les deux variétés $P = 0$, $P' = 0$ sont identiques.

Il en est évidemment de même des deux variétés $Q = 0$, $Q' = 0$.

J'appellerai $C$ la variété $P = 0$; et $C'$ la variété $Q = 0$; j'appellerai $W$ l'intersection de ces deux variétés qui est elle-même une variété à $2n - 4$ dimensions.

Il importait de démontrer que la définition de la variété $C$ ne dépendait pas de la façon dont $F$ est mise sous la forme du quotient de deux séries, c'est à dire que les deux variétés $P = 0$ et $P' = 0$ sont identiques; je puis ainsi étendre nos variétés $C$ et $C'$ au delà du domaine $G$.

Supposons maintenant que notre fonction méromorphe $F$ est $2n$ fois périodique. L'espace à $2n$ dimensions va se trouver partagé en une infinite de *prismatoïdes des périodes* dont le rôle est analogue à celui des parallélogrammes des périodes dans la théorie des fonctions elliptiques.

Soient

$$R_0, R_1, R_2, \ldots, R_k, \ldots$$

ces prismatoïdes; l'ordre des indices est d'ailleurs arbitraire jusqu'à nouvel ordre.

Je désignerai par; $C_k$, $C'_k$, $W_k$ les portions de variétés $C$, $C'$, $W$ qui sont intérieures au prismatoïde $R_k$.

L'aire de $C_k$ sera finie; ce sera une constante qui sera la même pour $C_k$ que pour $C_0$; car la variété $C_k$ n'est autre chose que la variété $C_0$ transportée parallèlement à elle-même. Soit $A$ cette aire.

Soit $d\omega'$ un élément de l'aire de la variété $C$, $M'$ son centre de gravité, $x'_1, y'_1, \ldots, x'_n, y'_n$ ses coordonnées. Soit $M$ le point de coordonnées courantes, $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$ ses coordonnées. Soit $r$ la distance $MM'$.

Considérons l'intégrale:

$$V_k = \int \frac{d\omega'}{r^{2n-2}},$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $C_k$ (c'est à dire le potentiel de cette variété $C_k$).

Développons $\frac{1}{r^{2n-2}}$ suivant les puissances croissantes des $x$ et des $y$, c'est à dire des coordonnées du point $M$, et écrivons:

$$\frac{1}{r^{2n-2}} = U_0 + U_1 + U_2 + \dots$$

$U_k$ étant un ensemble de termes homogène de degré $k$ par rapport aux $x$ et aux $y$.

Supposons que les coordonnées $x$ et $y$ soient finies et les coordonnées $x'$ et $y'$ très grandes, de telle façon que

$$\rho = \sqrt{\Sigma x_k'^2 + \Sigma y_k'^2},$$

distance du point $M'$ à l'origine, soit un infiniment grand du 1[er] ordre.

Alors $U_0$ sera égal à

$$\frac{1}{\rho^{2n-2}}$$

et sera un infiniment petit d'ordre $2n - 2$.

$U_1$ sera un infiniment petit d'ordre $2n - 1$, $U_2$ d'ordre $2n$ etc.

Si nous posons:

$$H = \frac{1}{r^{2n-2}} - U_0 - U_1 - U_2,$$

$H$ sera un infiniment petit d'ordre $2n + 1$.

Précisons davantage; je suppose que $\rho_0$ et $\rho_1$ soient deux constantes et que l'on ait:

$$(\alpha) \qquad \Sigma x^2 + \Sigma y^2 < \rho_0^2 < \rho_1^2 < \Sigma x'^2 + \Sigma y'^2$$

on pourra trouver une constante $B$ telle que

$$|H| < \frac{B}{\rho^{2n+1}}.$$

Soit maintenant

$$S_k = \int d\omega'(U_0 + U_1 + U_2),$$

l'intégration étant étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $C_k$; $S_k$ sera un polynôme du 2[d] degré par rapport aux $x$ et aux $y$. Ce polynôme sera harmonique, c'est à dire qu'on aura

$$\Delta S_k = 0;$$

car on a

$$\Delta \frac{1}{r^{2n-2}} = 0$$

et par conséquent

$$\Delta U_0 = \Delta U_1 = \Delta U_2 = 0.$$

On a ensuite:

$$V_k - S_k = \int H d\omega'.$$

Il est clair que si les inégalités ($\alpha$) sont remplies, on aura:

$$| V_k - S_k | < \frac{AB}{\sigma^{2n+1}},$$

la lettre $\sigma$ désignant la plus petite valeur que puisse prendre $\rho$ à l'intérieur du prismatoïde $R_k$.

Soit d'un autre côté $T$ le volume d'un prismatoïde des périodes; ce volume est évidemment le même pour tous les prismatoïdes. Soit $D$ la longueur de la plus grande diagonale de ce prismatoïde; cette longueur est aussi la même pour tous les prismatoïdes.

A l'intérieur du prismatoïde $R_k$, $\rho$ sera compris entre $\sigma$ et $\sigma + D$. L'intégrale $2n^{\text{ple}}$

$$\int \frac{dx'_1 dx'_2 \dots dx'_n dy'_1 \dots dy'_n}{(\rho - D)^{2n+1}} = \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue au prismatoïde $R_k$ sera plus grande que $\frac{T}{\sigma^{2n+1}}$; je désigne pour abréger par $d\tau$ le produit des $2n$ différentielles $dx'$ et $dy'$

On aura donc:

$$| V_k - S_k | < \frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n-1}}$$

Je dis que la série:

$$\Sigma (V_k - S_k)$$

est absolument convergente. En effet nous distinguerons parmi les prismatoïdes $R_k$:

1° ceux dont tous les points ne satisfont pas aux inégalités

$$\rho > \rho_1 \ , \ \rho > D.$$

Ceux-là sont en nombre fini et correspondent à un nombre fini de termes de la série.

2° ceux dont tous les points satisfont aux inégalités

$$\rho > \rho_1 \,, \; \rho > D.$$

La somme

$$\Sigma \,| V_k - S_k |$$

relative à ces prismatoïdes est plus petite que l'intégrale:

$$\frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de ces prismatoïdes; ou a fortiori plus petite que l'intégrale

$$\frac{AB}{T} \int \frac{d\tau}{(\rho - D)^{2n+1}}$$

étendue à tous les éléments $d\tau$ de l'espace tels que

$$\rho > \rho_1 \,, \; \rho > D;$$

je puis toujours supposer pour fixer les idées

$$\rho > \rho_1 > D.$$

Or cette dernière intégrale est égale à l'intégrale simple

$$\frac{AB\varpi}{T} \int_{\rho_1}^{\infty} \frac{d\rho}{\rho^2},$$

$\varpi$ étant une constante, et cette intégrale simple est finie.

Donc la série

$$\Sigma (V_k - S_k)$$

est absolument convergente. C. Q. F. D.

Cette série est évidemment égale à l'intégrale

$$\int H d\omega'$$

étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la variété $C$.

Je désigne par $V$ la somme de cette série.

Voici les propriétés fondamentales de cette fonction $V$.

1° Elle est harmonique dans tout l'espace sauf pour les points de la variété $C$.

2° La différence $V - V_k$ est harmonique en tous les points du prismatoïde $R_k$.

3° Envisageons un domaine $G$, où l'on peut mettre $F$ sous la forme $\frac{P}{Q}$ et qui fasse partie de $R_k$.

D'après le théorème fondamental du paragraphe précédent, la fonction

$$\log|P|$$

est, à l'intérieur de $G$, égale à

$$\varphi + \varphi',$$

$\varphi$ étant une fonction holomorphe et harmonique des $x$ et des $y$ et $\varphi'$ étant le potentiel d'une variété attirante qui est la partie de $C$ intérieure à $G$; c'est à dire l'intégrale

$$\int \frac{d\omega'}{r^{2n-2}}$$

étendue à cette partie de $C$. Mais comme $V_k$ est la même intégrale étendue à une partie de $C$ plus étendue, à savoir à la partie de $C$ qui est intérieure à $R_k$, la différence

$$V_k - \varphi'$$

sera une fonction holomorphe et harmonique dans $G$.

Donc la différence

$$V_k - \log|P|$$

et par conséquent *la différence*

$$V - \log|P|$$

*est dans tout le domaine $G$ une fonction holomorphe et harmonique des $x$ et des $y$.*

4° La fonction $\log|P|$ est biharmonique.

Si donc je représente par

$$DV$$

l'une des expressions

$$\frac{d^2V}{dx_k^2}+\frac{d^2V}{dy_k^2}\,,\quad \frac{d^2V}{dx_k\,dx_q}+\frac{d^2V}{dy_k\,dy_q}\,,\quad \frac{d^2V}{dx_k\,dy_q}-\frac{d^2V}{dy_k\,dx_q}\,,$$

on aura:

$$D\log|P| = 0.$$

Or $V - \log|P|$ est une fonction holomorphe et harmonique; donc

$$D(V - \log|P|)$$

sera aussi une fonction holomorphe et harmonique, puisque

$$\Delta D(V - \log|P|) = D\Delta(V - \log|P|) = 0;$$

et puisque

$$D\log|P| = 0$$

nous arrivons à cette conclusion que

*$DV$ est une fonction holomorphe et harmonique dans tout l'espace.*

5° Qu'arrive-t-il quand les quantités $z_1, z_2, \ldots, z_n$ augmentent d'une période?

Soit $a_1, a_2, \ldots, a_n$ une période de telle façon que la fonction $F$ ne change pas quand $z_1, z_2, \ldots, z_n$ se changent en

$$z_1 + a_1\,,\ z_2 + a_2\,,\ \ldots\,,\ z_n + a_n.$$

Je représenterai par

$$V(z_i + a_i)\,,\ V_k(z_i + a_i)\,,\ S_k(z_i + a_i)$$

ce que deviennent $V$, $V_k$ et $S_k$, c'est à dire $V(z_i)$, $V_k(z_i)$, $S(z_i)$ quand on change $z_i$ en $z_i + a_i$; nous aurons alors:

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i + a_i) - S_k(z_i + a_i)],$$

$$V(z_i) = \Sigma[V_k(z_i) - S_k(z_i)].$$

Quand $z_i'$ se changera en $z_i' + a_i$, le prismatoïde $R_k$ se changera en un autre prismatoïde $R_h$; et comme la distance des points $z_i + a_i$ et $z_i' + a_i$ est égale à celle des points $z_i$ et $z_i'$, nous aurons:

$$V_k(z_i) = V_h(z_i + a_i).$$

D'autre part nous pouvons remplacer l'équation

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i + a_i) - S_k(z_i + a_i)]$$

par la suivante:

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_h(z_i + a_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

Les deux séries ne diffèrent en effet que par l'ordre des termes; la première s'étend aux prismatoïdes $R_k$, c'est à dire à *tous* les prismatoïdes; la seconde aux prismatoïdes $R_h$, c'est à dire aussi à *tous* les prismatoïdes. Je puis écrire également:

$$V(z_i + a_i) = \Sigma[V_k(z_i) - S_h(z_i + a_i)]$$

et par conséquent:

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Sigma[S_k(z_i) - S_h(z_i + a_i)].$$

Tous les termes du $2^d$ membre sont des polynômes du $2^d$ degré par rapport aux $x$ et aux $y$.

Donc quand les $z$ augmentent d'une période, $V$ augmente d'un polynôme qui est au plus du $2^d$ degré.

Etudions les termes du second degré et cherchons par exemple le coefficient de $\frac{x_1^2}{2}$.

Dans $S_k(z_i)$ ce coefficient est égal à l'intégrale:

$$\int d\omega' \frac{d^2\rho^{-2n+2}}{dx_1'^2} \quad \text{où} \quad \rho^2 = \Sigma x_k'^2 + \Sigma y_k'^2;$$

l'intégration est étendue à tous les éléments $d\omega'$ de la partie de $C$ qui est intérieure à $R_k$; j'appelle $J_k$ cette intégrale.

Dans $S_h(z_i + a_i)$, le coefficient sera la même intégrale étendue à tous les élements $d\omega'$ de la partie de $C$ intérieure à $R_h$; c'est donc $J_h$.

Donc le coefficient cherché dans $V(z_i + a_i) - V(z_i)$ est la somme de la série:

$$\Sigma(J_k - J_h).$$

Je dis que cette série est absolument convergente et a pour somme zéro. Elle est absolument convergente parce que son terme général est de l'ordre de

$$\rho^{-(2n+1)},$$

c'est à dire du même ordre que le terme général de la série $\Sigma(V_k - S_k)$ qui est convergente.

Pour évaluer la somme, groupons les termes d'une façon particulière.

Soit $R_k = R'_0$ un prismatoïde quelconque, $R_h = R'_1$ ce que devient $R_k$ quand on change $z'_i$ en $z'_i + a_i$; soit plus généralement $R'_n$ ce que devient $R_k = R'_0$ quand on change $z'_i$ en $z'_i + na_i$, $n$ étant un entier positif ou négatif.

Les prismatoïdes

$$\ldots, R'_{-n}, \ldots, R'_{-1}, R'_0, R'_1, R'_2, \ldots, R'_p, \ldots$$

formeront ce que j'appellerai un groupe de prismatoïdes. Tout prismatoïde appartiendra à l'un de ces groupes et à un seul.

Nous aurons ainsi réparti en groupes les prismatoïdes et par conséquent les termes de la série.

Il me suffit de montrer que la somme des termes d'un groupe est nulle.

En effet, soit $J'_n$ l'intégrale qui sera à $R'_n$ ce que $J_k$ est à $R_k$. Notre groupe de termes s'écrira:

$$(J'_{-n} - J'_{-n+1}) + \ldots + (J'_{-1} - J'_0) + (J'_0 - J'_1) + (J'_1 - J'_2) + \ldots + (J'_p - J'_{p+1}).$$

La somme des termes sera

$$J'_{-n} - J'_{p+1},$$

en nous arrêtant au $n^e$ terme dans un sens et au $p^e$ dans l'autre. Quand $n$ et $p$ croîtront indéfiniment, $J'_{-n}$ et $J'_{p+1}$ tendront vers zéro.

Donc la somme cherchée est nulle.

C. Q. F. D.

Donc le coefficient de $\frac{x_1^2}{2}$ est nul et on démontrerait de même que les autres termes du second degré sont nuls également.

Donc la différence $V(z_i + a_i) - V(z_i)$ est un polynôme du 1^er^ degré seulement.

*Donc quand les $z$ augmentent d'une période, la fonction $V$ augmente d'un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $x$ et aux $y$.*

On démontrerait de même:

1° Que l'intégrale

$$V' = \int H d\omega'$$

étendue à tous les éléments de la variété $C'$ est finie.

2° Que la fonction $V'$ est harmonique dans tout l'espace sauf sur la variété $C'$.

3° Que la différence

$$V' - \log|Q|$$

est dans tout le domaine $G$ une fonction holomorphe et harmonique.

4° Que les expressions $DV'$ sont harmoniques dans tout l'espace.

5° Que la fonction $V'$ augmente d'un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $x$ et aux $y$ quand les $z$ augmentent d'une période.

## § 9. *Introduction des fonctions $\theta$.*

Nous venons de voir que les expressions $DV$ sont des fonctions holomorphes et harmoniques dans tout l'espace.

D'autre part, nous avons trouvé:

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Pi,$$

$\Pi$ étant un polynôme du 1^er^ degré; on a donc:

$$DV(z_i + a_i) - DV(z_i) = D\Pi = 0$$

ou

$$DV(z_i + a_i) = DV(z_i)$$

ce qui montre que les $DV$ sont des fonctions périodiques.

Les $DV$ étant des fonctions à la fois harmoniques et périodiques se réduisent à des constantes (théorème 7).

Je dis maintenant que l'on peut toujours trouver un polynôme $Z$ du second degré par rapport aux $x$ et aux $y$ et tel que les expressions $DZ$ se réduisent à des constantes données.

Ce théorème peut encore s'énoncer d'une autre manière.

Reprenons les notations du § 3 et posons:

$$x_k + iy_k = z_k, \qquad x_k - iy_k = u_k.$$

Je dis qu'on peut toujours trouver un polynôme $Z$ du second degré par rapport aux $z$ et aux $u$ et tel que les $n^2$ quantités:

$$\frac{d^2Z}{dz_k\, du_q}$$

soient égales à $n^2$ constantes données $A_{k.q}$.

L'identité des deux énoncés est manifeste et d'ailleurs le second énoncé est immédiatement évident puisqu'on n'a qu'à prendre:

$$Z = \Sigma A_{kq} z_k u_q.$$

Il résulte de là que nous pourrons toujours trouver un polynôme $Z$ tel que les expressions $DZ$ soient égales aux constantes $DV$.

On aura donc

$$D(V - Z) = 0$$

c'est à dire que la fonction $V - Z$ est biharmonique dans tout l'espace sauf sur $C$.

D'autre part $\log|P|$ étant biharmonique, on a

$$D(V - Z - \log|P|) = 0$$

et comme $V - Z - \log|P|$ est holomorphe et harmonique à l'intérieur de $G$, même sur $C$, nous pouvons conclure que

$$V - Z - \log|P|$$

est holomorphe et *biharmonique* à l'intérieur de $G$, même sur $C$. Enfin $V - Z$ augmente d'un polynôme du 1^er^ degré par rapport aux $x$ et aux $y$, quand les $z$ augmentent d'une période.

Les équations

$$D(V-Z)=0$$

nous apprennent que l'expression

$$\sum\left[\frac{d(V-Z)}{dx_k}dy_k-\frac{d(V-Z)}{dx_k}dx_k\right]$$

est une différentielle exacte. Posons donc:

$$T=\int\sum\left[\frac{d(V-Z)}{dx_k}dy_k-\frac{d(V-Z)}{dy_k}dx_k\right].$$

L'intégrale prise le long d'un contour fermé est nulle si ce contour ne tourne par autour de $C$; elle n'est pas nulle en général, si le contour tourne autour de $C$.

Donc $T$ est une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe ne contenant aucun point de $C$. Mais ce n'est plus une fonction uniforme dans un domaine traversé par $C$.

Considérons de même la fonction:

$$\arg.P=\int\sum\left[\frac{d\log|P|}{dx_k}dy_k-\frac{d\log|P|}{dy_k}dx_k\right],$$

c'est également une fonction uniforme dans tout domaine simplement connexe non traversé par $C$; et une fonction non uniforme dans un domaine traversé par $C$.

La différence:

$$T-\arg.P=\int\sum\left[\frac{d(V-Z-\log|P|)}{dx_k}dy_k-\frac{d(V-Z-\log|P|)}{dy_k}dx_k\right]$$

est une fonction uniforme dans tout le domaine $G$, quoique ce domaine soit traversé par $C$; et en effet $V-Z-\log|P|$ est biharmonique dans tout le domaine $G$.

La fonction

$$\varphi=V-Z+iT-\log P$$

a pour partie réelle

$$V-Z-\log|P|$$

et pour partie imaginaire

$$T - \arg. P.$$

C'est donc une fonction des $n$ variables complexes

$$z_1, z_2, \ldots, z_n$$

et de plus cette fonction est holomorphe dans tout le domaine $G$.

Posons ensuite:

$$e^{V-Z+iT} = \theta(z_i)$$

il viendra:

$$\theta = Pe^{\varphi}.$$

$P$ et $\varphi$ étant des fonctions holomorphes des $n$ variables complexes $z$ dans le domaine $G$, il en sera de même de $\theta$ et comme tout point de l'espace fait partie d'un domaine tel que $G$:

*La fonction $\theta$ est une fonction des $n$ variables complexes $z$ holomorphe dans tout l'espace.*

Nous avons trouvé plus haut:

$$V(z_i + a_i) - V(z_i) = \Pi,$$

$\Pi$ étant un polynôme du 1^er degré. D'autre part $Z$ étant un polynôme du second degré, on aura:

$$Z(z_i + a_i) - Z(z_i) = \Omega,$$

$\Omega$ étant un polynôme du 1^er degré; il vient alors:

$$\frac{d}{dy_k}[T(z_i + a_i) - T(z_i)] = \frac{d}{dx_k}[V(z_i + a_i) - V(z_i) - Z(z_i + a_i) + Z(z_i)]$$

$$= \frac{d(\Pi + \Omega)}{dx_k} = \text{const.}$$

et de même:

$$\frac{d}{dx_k}[T(z_i + a_i) - T(z_i)] = -\frac{d(\Pi + \Omega)}{dy_k} = \text{const.}$$

Les dérivées de $T(z_i + a_i) - T(z_i)$ étant des constantes, on aura:

$$T(z_i + a_i) - T(z_i) = \Psi,$$

$\Psi$ étant encore un polynôme du premier degré. J'écris enfin:

$$V(z_k + a_k) - Z(z_k + a_k) + iT(z_k + a_k) - V(z_k) + Z(z_k) - iT(z_k) = U,$$

$U$ étant un polynôme du 1[er] degré par rapport aux $x$ et aux $y$.

Comme

$$V(z_k) - Z(z_k) + iT(z_k),$$
$$V(z_k + a_k) - Z(z_k + a_k) + iT(z_k + a_k)$$

sont des fonctions des $n$ variables complexes $z$, il en sera de même de $U$.

*Donc $U$ est un polynôme du* 1[er] *degré par rapport aux $n$ variables complexes $z$ et on aura*

$$(1) \qquad \theta(z_i + a_i) = \theta(z_i)e^U.$$

Cette propriété rappelle la propriété fondamentale des fonctions $\theta$ et il est aisé de voir comment les fonctions qui satisfont à la condition (1) se ramènent aux fonctions $\theta$ ordinaires; je renverrai pour plus de détails à mon mémoire sur les fonctions abéliennes inséré dans l'American Journal of Mathematics.

On démontrerait de même:

1° que les $DV'$ sont des constantes.

2° qu'il existe un polynôme du second degré $Z'$ tel que

$$DZ' = DV'.$$

3° que si l'on pose:

$$T' = \int \sum \left[\frac{d(V' - Z')}{dx_k} dy_k - \frac{d(V' - Z')}{dy_k} dx_k\right],$$
$$\theta' = e^{V' - Z' + iT'};$$

la fonction $\theta'$ est dans tout l'espace une fonction holomorphe des $n$ variables complexes $z$.

4° enfin que

$$\theta'(z_i + a_i) = \theta'(z_i)e^{U'},$$

$U'$ étant un polynôme du 1[er] degré par rapport aux $n$ variables complexes $z$.

Considérons maintenant le rapport:

$$\frac{F\theta'}{\theta}$$

ou plutôt son logarithme

$$H = \log F + \log \theta' - \log \theta.$$

1° C'est une fonction des $n$ variables complexes $z$.

2° Cette fonction $H$ est holomorphe dans tout l'espace, et en effet, dans le domaine $G$, elle est égale à la différence de

$$V' - Z' + iT' - \log Q$$

et

$$V - Z + iT - \log P$$

qui sont toutes deux holomorphes dans le domaine $G$.

3° Quand les $z$ augmentent d'une période, cette fonction $H$ augmente de

$$U' - U$$

c'est à dire d'un polynôme du 1^er^ degré; les dérivées secondes de $H$ sont donc périodiques et comme elles sont holomorphes dans tout l'espace, elles se réduisent à des constantes.

En d'autres termes $H$ est un polynôme du second degré.

On a donc finalement

$$F = \frac{\theta}{\theta'} e^H,$$

$H$ étant un polynôme du second degré.

Cette formule démontre la possibilité de mettre $F$ sous la forme du quotient de deux fonctions $\theta$ ordinaires; il suffit pour s'en rendre compte d'appliquer les principes de mon mémoire cité de l'American Journal of Mathematics.

# SUR L'INTÉGRALE FINIE D'UNE FONCTION ENTIÈRE

PAR

A. HURWITZ

À ZÜRICH.

Je reviens ajourd'hui au mémoire que j'ai publié sous ce titre dans le tome 20 de ce journal pour y ajouter une citation relative à un mémoire important de M. Appell *sur les fonctions périodiques de deux variables,*[1] dont j'ai eu connaissance récemment par l'obligeance de son illustre auteur. M. Appell y donne une démonstration du théorème de M. Guichard en formant des fonctions entières $\psi_n(z)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ satisfaisant aux identités

$$\psi_n(z+1) - \psi_n(z) = z^n$$

et ayant la propriété que la série

$$G(z) = a_0\psi_0(z) + a_1\psi_1(z) + \ldots + a_n\psi_n(z) + \ldots$$

est convergente pour toute valeur de $z$, si la série

$$H(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

représente une fonction entière. Ainsi, l'idée fondamentale dont je pars dans mon mémoire appartient à M. Appell. Seulement il y a une différence quant'au développement de l'idée. Les fonctions $\psi_n(z)$ de M. Appell sont définies par l'intégrale affectée de coupures:

$$\psi_n(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{2n\pi zi} + e^{-2n\pi zi}}{e^{2n\pi zt} + e^{-2n\pi zt}} \cdot \frac{i^{n+1} t^{n+1} e^{-2\pi t}}{e^{-2\pi t} - e^{2\pi zi}}\, dt,$$

[1] Journal de mathématiques pures et appliquées, quatrième série, t. 7 (1891).

tandis que les fonctions $\psi_n(z)$ dont je me sers et que je désigne par $\psi_{n,n}(z)$ dans mon mémoire ont l'expression suivante:

$$\psi_{n,n}(z) = \varphi_n(z) - \underline{|n} \sum_k \frac{1 - e^{2k\pi iz}}{(2k\pi i)^{n+1}}, \quad (k = +1, -1, +2, -2, \ldots, +n, -n)$$

où $\varphi_n(z)$ désigne la fonction de BERNOULLI. Comme le démontre M. APPELL la fonction $\psi_n(z)$ diffère de $\varphi_n(z)$, de même que la fonction $\psi_{n,n}(z)$, d'un polynôme en $e^{2\pi iz}$ et $e^{-2\pi iz}$; mais les coefficients de ce polynôme se présentent sous la forme d'intégrales définies et ne sont pas susceptibles d'une représentation explicite et simple.

Zürich, janvier 1898.

terisirte: »Jene merkwürdige und scharfsinnige Deduction, welche ganz direct mit Überwindung aller Schwierigkeiten auf das Ziel losgehend fast wie eine Art Kraftprobe Gauss'schen Geistes erscheint.»

Die mathematische öffentliche Meinung hat — soviel ich weiss — bei dem inductiven Beweise des Reciprocitätsgesetzes bisher jene Kraftprobe für unerlässlich gehalten und schon darum dürfen die folgenden Betrachtungen einiges Interesse beanspruchen. Doch abgesehen hievon ist für das System der Arithmetik die Thatsache nicht ohne Wichtigkeit, dass das Reciprocitätzgesetz in der That eine ausschliessliche Folge der Definition des Legendre'schen Symbols ist, und aus der Theorie der höheren Congruenzen nicht das geringste, also auch weder die Fermat'sche Congruenz, noch das Euler'sche Kriterium, noch irgend ein anderes äquivalentes Hülfsmittel vorwegnimmt.

Um dies ganz klar zu legen, sollen zuerst die als Prämissen zu verwendenden Sätze vollständig zusammengestellt werden.

*Die Prämissen des Beweises.* Ist $p$ irgend eine ungerade Primzahl, und $a$ durch $p$ nicht theilbar, so bedeute das Zeichen $\left(\frac{a}{p}\right)$ die positive oder negative Einheit, je nachdem die Congruenz $x^2 \equiv a \pmod{p}$ eine Wurzel besitzt oder nicht, der gebräuchlichen Terminologie nach also je nachdem $a$ Rest oder Nichtrest von $p$ ist. Wenn aber $a$ durch $p$ theilbar ist, soll $\left(\frac{a}{p}\right)$ gleich Null sein.

Die Multiplicationsregel des so definirten Legendre'schen Symbols lautet:

$$\left(\frac{a}{p}\right)\left(\frac{b}{p}\right) = \left(\frac{ab}{p}\right),$$

und ist eine unmittelbare Folge der Definition, wenn sowohl $a$, als $b$ Reste von $p$ sind. In den übrigen Fällen sind bekanntlich nur noch jene beiden ganz elementaren Sätze zu verwenden, nach denen

erstens mit $x$ auch $ax$ ein vollständiges System incongruenter Zahlen mod. $p$ durchläuft und

zweitens die Anzahl sowohl der Reste, wie der Nichtreste von $p$ gleich $\frac{1}{2}(p-1)$ ist.

Das Jacobi'sche Symbol ist nun nichts anderes, als eine rein formale Verallgemeinerung des Legendre'schen; ist nämlich $P$ irgend eine positive,

ungerade ganze Zahl — weiter gehn wir hier überhaupt nicht — und hat $P$ in Primfactoren zerlegt die Form:

$$P = p_1 p_2 \ldots p_r,$$

so lautet die Definition des Jacobi'schen Symbols:

$$\left(\frac{a}{P}\right) = \left(\frac{a}{p_1}\right)\left(\frac{a}{p_2}\right)\cdots\left(\frac{a}{p_r}\right),$$

und die Multiplicationsregel des Legendre'schen Symbols bleibt demnach auch für dieses erhalten.

Zu den Prämissen gehört endlich noch der auf den quadratischen Restcharakter von $-1$ bezügliche Satz, nach welchem:

$$\left(\frac{-1}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}} = \varepsilon_p.$$

(Im folgenden soll nämlich der Kürze wegen statt $(-1)^{\frac{n-1}{2}}$ immer $\varepsilon_n$ geschrieben werden.) Ein von EULER stammender Beweis dieses Satzes, der sich im 109. Art. der »Disquisitiones« reproducirt findet, bewegt sich ausschliesslich in dem angegebenen elementaren Gedankenkreise. Um dem Leser hierüber am bequemsten ein klares Bild zu geben, soll dieser Beweis — in aller Kürze und zweckentsprechend formulirt — hier eingefügt werden.

Die Reste der ungeraden Primzahl $p$,

$$a_1, a_2, \ldots, a_{\frac{p-1}{2}}$$

werden in zwei Classen eingereiht.

In die erste Classe mögen jene Reste $a$ gehören, für welche $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ ist. Nun ist $a^2 - 1 = (a-1)(a+1)$ nur dann durch $p$ theilbar, wenn $a-1$ oder $a+1$ theilbar ist, also nur dann, wenn $a \equiv 1$ oder $a \equiv -1 \pmod{p}$. In diese erste Classe gehören demnach ein oder zwei Reste, je nachdem $-1$ Rest oder Nichtrest ist; da doch $+1$ immer ein Rest ist.

In die zweite Classe gehören alle übrigen Reste. In dieser Classe findet sich zu jedem Reste $a$ ein und nur ein zweiter Rest $b$, so dass $ab \equiv 1 \pmod{p}$, und zwar ist $b$ von $a$ verschieden, da sonst $a$ der ersten

Classe angehören würde. Zu $b$ gehört nun ebenso wieder $a$; es vertheilen sich demnach die Reste der zweiten Classe in Paare, ihre Anzahl ist gerade.

Ist nun $p = 4n + 1$, und demnach die Anzahl sämmtlicher Reste, $\frac{p-1}{2}$, gerade, so müssen die der ersten Classe angehörigen Reste auch in gerader Zahl vorhanden sein, und dann ist $-1$ Rest von $p$.

Ist hingegen $p = 4n + 3$, also $\frac{p-1}{2}$ ungerade, so müssen die Reste erster Classe in ungerader Zahl vorhanden sein; es ist also $-1$ Nichtrest von $p$.

Damit ist aber bekanntlich der Inhalt des Satzes $\left(\frac{-1}{p}\right) = \varepsilon_p$ erschöpft.

---

Nach dieser Einleitung wenden wir uns zu unserem eigentlichen Gegenstande. Der zu betretende Weg ist ein wesentlich anderer, als in Gauss' erstem Beweise, oder der Dirichlet'schen Umarbeitung (Crelle, Journal, 47. Bd.). Eine Unterscheidung verschiedener Fälle je nach dem Charakter der vorkommenden Primzahlen findet überhaupt nicht statt, sondern wir zerlegen den Reciprocitätssatz entsprechender Massen in von einander unabhängige Theilsätze, die entweder mit Hülfe der vollständigen Induction leicht direct zu beweisen sind, oder durch Umkehrung aus den schon bewiesenen Theilsätzen entspringen.

**Satz I.** *Sind $q$ und $r$ zwei positive, ungerade Primzahlen, und ist ferner $q < r$, so folgt aus $\left(\frac{\varepsilon_q q}{r}\right) = 1$ immer auch $\left(\frac{r}{q}\right) = 1$.*

Da der Satz für die kleinsten Primzahlen, z. B. diejenigen unterhalb 11, richtig ist, so kann der allgemeine Beweis so geführt werden, dass wir den Satz für die Zusammenstellung zweier Primzahlen die kleiner als $r$ sind, als richtig voraussetzen, und dann nachweisen, dass er auch für die Zusammenstellung einer Primzahl unterhalb $r$ mit $r$ selbst richtig bleibt.

Im Sinne unsrer Voraussetzung hat die Congruenz

$$x^2 - \varepsilon_q q \equiv 0 \pmod{r}$$

Wurzeln; sei $a$ eine Wurzel, die positiv und kleiner als $r$ ist; dann ist $r-a$ eine ebensolche; und zwar ist von den beiden Wurzeln die eine gerade, die andere ungerade. Wir bezeichnen die gerade Wurzel mit $\xi$; dann ist

$$(1)\qquad \xi^2 - \varepsilon_q q = r\varphi,$$

und $\varphi$ ist jedenfalls ungerade, weil $\xi$ gerade; $\varphi$ ist ferner positiv, denn selbst im ungünstigen Falle, wenn $\varepsilon_q = 1$, kann die links stehende Differenz nicht negativ sein; sonst wäre ja $q - \xi^2$ positiv, und diese positive Zahl kleiner als $q$, und trotzdem durch die Primzahl $r$, die grösser als $q$ ist, theilbar. Ferner hat man

$$r\varphi \leqq \xi^2 + q < (r-1)^2 + r,$$

und hieraus unmittelbar

$$\varphi < r.$$

a) Wenn nun $\varphi$ nicht durch $q$ theilbar ist, so erhält man für jeden Primfactor $\pi_i$ von $\varphi$

$$\left(\frac{\varepsilon_q q}{\pi_i}\right) = 1,$$

und da $\pi_i \leqq \varphi < r$, im Sinne der Voraussetzung auch

$$\left(\frac{\pi_i}{q}\right) = 1,$$

und endlich durch Multiplication $\left(\frac{\varphi}{q}\right) = 1$. Andrerseits ergibt aber die fundamentale Identität (1)

$$\left(\frac{r\varphi}{q}\right) = 1$$

und schliesslich

$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{\varphi}{q}\right) = 1.$$

b) Ist aber $\varphi$ durch $q$ theilbar, so setzen wir $\varphi = q\psi$; dann ist nach (1) auch $\xi$ durch $q$ theilbar, also $\xi = q\eta$; durch diese Substitutionen geht (1) in

$$q^2\eta^2 - \varepsilon_q q = rq\psi$$

oder

$$(2) \qquad \varepsilon_q q \eta^2 - 1 = \varepsilon_q r \psi$$

über, wo $\psi$ wieder kleiner als $r$, positiv und ungerade ist, den Theiler $q$ aber, wie die linke Seite zeigt, nicht mehr enthält. Diese Identität zeigt nun wieder, dass $\varepsilon_q q$ Rest von jedem Primfactor $\pi_i$ der Zahl $\psi$, also $\left(\frac{\varepsilon_q q}{\pi_i}\right) = 1$, und hieraus nach unsern Voraussetzungen $\left(\frac{\pi_i}{q}\right) = 1$ also schliesslich auch $\left(\frac{\psi}{q}\right) = 1$.

Andrerseits folgt aus (2)

$$r\psi \equiv -\varepsilon_q \pmod{q};$$

also $\left(\frac{r\psi}{q}\right) = \left(\frac{-\varepsilon_q}{q}\right)$, was wie man leicht sieht, immer $+1$ ergibt, hieraus endlich

$$\left(\frac{r}{q}\right) = \left(\frac{\psi}{q}\right) = 1,$$

womit unser Satz auch für diesen Fall bewiesen ist.

**Satz II.** *Sind $q$ und $r$ zwei positive, ungerade Primzahlen, und ist ferner $q < r$, so folgt aus $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$ immer auch $\left(\frac{\varepsilon_q r}{q}\right) = 1$.*

Dem bei Satz I. benutzten Gedankengange abermals folgend, hat nun die Congruenz

$$x^2 - q \equiv 0 \pmod{r}$$

Wurzeln; und es sei wieder $\xi$ eine solche, die positiv, gerade und kleiner als $r$ ist. Dann erhält man

$$(3) \qquad \xi^2 - q = r\varphi$$

und $\varphi$ ist wieder positiv, ungerade und kleiner als $r$.

a) Wenn nun $\varphi$ nicht durch $q$ theilbar ist, so hat man für jeden Primfactor $\pi_i$ von $\varphi$ die Relation $\left(\frac{q}{\pi_i}\right) = 1$, und also, da der Satz für

die Zusammenstellung zweier Primzahlen unterhalb $r$ als richtig angenommen wird, hieraus $\left(\frac{\varepsilon_{\pi_i}\pi_i}{q}\right) = 1$, und endlich durch Multiplication

$$\left(\frac{\varepsilon_\varphi \varphi}{q}\right) = 1,$$

da ja bekanntlich $\varepsilon_a \varepsilon_b = \varepsilon_{ab}$ ist.

Andrerseits erhält man aus der Identität (3)

$$\left(\frac{r\varphi}{q}\right) = 1$$

und demnach

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = \left(\frac{\varepsilon_r \varphi}{q}\right).$$

Ist nun $q \equiv 1 \pmod{4}$, so sind $+\varphi$ und $-\varphi$ zugleich Reste oder Nichtreste von $q$; es ist also auch

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = \left(\frac{\varepsilon_\varphi \varphi}{q}\right) = 1.$$

Für den zweiten Fall, $q \equiv 3 \pmod{4}$, bemerken wir, dass

$$r\varphi = \xi^2 - q \equiv 1 \pmod{4}$$

ist, also $\varepsilon_{r\varphi} = 1$, oder $\varepsilon_r = \varepsilon_\varphi$ und hienach wieder

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = \left(\frac{\varepsilon_\varphi \varphi}{q}\right) = 1,$$

was zu beweisen war.

b) Ist nun wieder zweitens $\varphi$ durch $q$ theilbar, dann gehn wir — grade so, wie früher bei Satz I. — zur Identität

$$q\eta^2 - 1 = r\psi \tag{4}$$

über. Auch diese zeigt, dass, wenn $\pi_i$ irgend einen Primfactor von $\psi$ bedeutet, $q$ Rest von $\pi_i$ ist, also $\left(\frac{q}{\pi_i}\right) = 1$, und hieraus wieder $\left(\frac{\varepsilon_{\pi_i}\pi_i}{q}\right) = 1$, oder endlich durch Multiplication $\left(\frac{\varepsilon_\psi \psi}{q}\right) = 1$.

Andrerseits hat man

$$r\psi \equiv -1 \pmod{q}$$

also $\left(\frac{r\psi}{q}\right) = \left(\frac{-1}{q}\right) = \varepsilon_q$. Und hieraus wieder:

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = \varepsilon_q\left(\frac{\varepsilon_r \psi}{q}\right) = \left(\frac{-\varepsilon_r \psi}{q}\right),$$

welche Symbole sich gleich $+1$ ergeben. Denn, da $\eta$ gerade, wird $r\psi \equiv 3 \pmod{4}$, also $\varepsilon_{r\psi} \equiv -1$, oder $\varepsilon_\psi = -\varepsilon_r$, und hienach

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = \left(\frac{\varepsilon_\psi \psi}{q}\right) = 1,$$

was zu beweisen war.

**Satz III.** *Sind $q$ und $r$ zwei positive, ungerade Primzahlen und ist ferner $q < r$, so folgt aus $\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = 1$ immer auch $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$.*

Unsere Voraussetzung nach ist die Congruenz

$$x^2 - \varepsilon_r r \equiv 0 \pmod{q}$$

lösbar. Sei nun $a$ irgend eine ihrer geraden Wurzeln; dann ist $a + 2qu$ eine ebensolche und man hat

$$(a + 2qu)^2 - \varepsilon_r r = q\varphi,$$

wo $\varphi$ ungerade und, wenn nur $u$ positiv und gross genug genommen wird, auch positiv ist.

Der Wert von $u$ soll nun noch so festgelegt werden, dass $\varphi$ nur solche Primzahlen als Theiler enthalte, die grösser als $r$ sind.

Damit zuerst

$$\varphi = \frac{a^2 - \varepsilon_r r}{q} + 4au + 4qu^2$$

nicht durch $q$ theilbar sei, genügt es $u$ der Congruenz

$$\text{(a)} \qquad \frac{a^2 - \varepsilon_r r}{q} + 4au \equiv 1 \pmod{q}$$

entsprechend zu wählen, was natürlich immer möglich ist, da ja $a$ nicht durch $q$ theilbar ist.

Seien nun $q_1, q_2, \ldots$ die sämmtlichen Primzahlen, die nicht grösser als $r$ sind, mit Ausschluss von $q$; und unter diesen $q'_1, q'_2, \ldots, r$ die-

jenigen, die in $1-\varepsilon_r r$ nicht als Theiler enthalten sind. Wählt man dann $u$ den Congruenzen

(b) $$a+2qu \equiv 1 \pmod{q_i'}$$

entsprechend, so wird

$$q\varphi \equiv 1-\varepsilon_r r \pmod{q_i'},$$

und mit $1-\varepsilon_r r$ ist also auch $\varphi$ nicht durch $q_i'$ theilbar.

Seien nun ferner $q_1'', q_2'', \ldots$ jene Primzahlen die nicht grösser als $r$ sind, aber in $1-\varepsilon_r r$ enthalten sind, ohne jedoch Theiler von $4-\varepsilon_r r$ zu sein. (Sollte keine solchen vorhanden sein, so fallen natürlich die aufzustellenden Bedingungen ganz fort.) Dem entsprechend unterwerfen wir $u$ noch den eventuellen Bedingungscongruenzen:

(c) $$a+2qu \equiv 2 \pmod{q_i''}$$

und dann zeigt wieder

$$q\varphi \equiv 4-\varepsilon_r r \pmod{q_i''},$$

dass $\varphi$ durch keine der Primzahlen $q_i''$ theilbar sein kann.

Nun bleiben aber von den Primzahlen unterhalb $r$ nur solche, die sowohl in $1-\varepsilon_r r$, als in $4-\varepsilon_r r$ als Theiler enthalten sind; eine solche kann nur die 3 sein. Sollte sich nun keine der Bedingungen (a), (b), (c) auf die 3 beziehen, beschränken wir die Wahl von $u$ von neuem durch die Congruenz:

(d) $$a+2qu \equiv 0 \pmod{3},$$

und dann ist

$$q\varphi \equiv -\varepsilon_r r \pmod{3},$$

also $\varphi$ keinesfalls durch 3 theilbar, da $r$ Primzahl und jedenfalls $> 3$.

Die linearen Congruenzen (a), (b), (c), (d) soweit sie in Anwendung kommen, besitzen immer gemeinschaftliche Lösungen; denn die Moduln sind durchaus verschiedene ungerade Primzahlen, während Coefficient der Unbekannten und Modul immer relative Primzahlen sind. Dabei kann natürlich $u$ immer noch positiv und beliebig gross gewählt werden. Dann

ist auch $\varphi$ positiv; mit dem so fixirten Werte von $u$ sei nun $\xi = a + 2qu$, das mit $a$ zugleich gerade ist, so erhält man endlich

$$\xi^2 - \varepsilon_r r = q\varphi, \tag{5}$$

und hier enthält $\varphi$ nur solche Primtheiler, die grösser als $r$ sind.

Nun hat man wieder nach (5) für jeden solchen Primtheiler $\pi_i$

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{\pi_i}\right) = 1$$

und hieraus, da $\pi_i > r$ ist, nach Satz I. $\left(\frac{\pi_i}{r}\right) = 1$, oder endlich durch Multiplication

$$\left(\frac{\varphi}{r}\right) = 1.$$

Andrerseits ergiebt sich aus (5) auch $\left(\frac{q\varphi}{r}\right) = 1$, also schliesslich

$$\left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{\varphi}{r}\right) = 1,$$

was zu beweisen war.

---

*Das Reciprocitätsgesetz* wird nun in der aller einfachsten Weise durch Zusammenstellung des II. und III. Satzes erschlossen. Man hat nämlich, wenn wieder $r > q$, nach II. aus $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$ immer auch $\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = 1$, und umgekehrt nach III. aus $\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = 1$ immer auch $\left(\frac{q}{r}\right) = 1$; die beiden Symbole haben demnach gleichzeitig den Wert $+1$ oder $-1$. Es ist also:

$$\left(\frac{\varepsilon_r r}{q}\right) = \left(\frac{q}{r}\right),$$

oder anders geschrieben

$$\left(\frac{r}{q}\right)\left(\frac{q}{r}\right) = \left(\frac{\varepsilon_r}{q}\right) = \left(\frac{\varepsilon_q}{r}\right) = (-1)^{\frac{q-1}{2}\frac{r-1}{2}},$$

die bekannte Form des Reciprocitätsgesetzes, in welcher $q$ und $r$ mit einander vertauscht werden können, und demnach also schliesslich auch die bisherige Einschränkung ($q < r$) wegfällt.

Zur Vervollständigung dieser Darstellung möge noch bemerkt werden, dass der auf die Zahl 2 bezügliche Ergänzungssatz, wenn einmal das Reciprocitätsgesetz festgestellt und demnach auch auf das Jacobi'sche Symbol ausgedehnt ist, nach einer von KRONECKER in seinen Vorlesungen gegebenen Bemerkung in zwei Zeilen erledigt werden kann.

Ist nämlich $P > 1$, positiv und ungerade, also eine der beiden Zahlen $P$ und $P - 2$ von der Form $4n + 1$, so hat man

$$\left(\frac{2}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{P-2}{P}\right) = \left(\frac{-1}{P}\right)\left(\frac{P}{P-2}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}}\left(\frac{2}{P-2}\right);$$

also bei Fortsetzung dieser Reduction schliesslich:

$$\left(\frac{2}{P}\right) = (-1)^{\frac{P-1}{2}+\frac{P-3}{2}+\dots+1} = (-1)^{\frac{P^2-1}{8}}.$$



denen wir die entsprechenden, auf die Entwickelung der zweiten Fundamentalformel bezüglichen

$$\sigma\Delta_2'(z) - J'(z) = -\frac{1}{2}\sigma\frac{P}{P_1},$$

(15')
$$J'(z) = -\sqrt{\sigma^3}\frac{Q_1}{P_1},$$

$$\theta'(z) = \frac{\sqrt{\sigma}}{2}\frac{Q}{P_1}$$

hinzufügen.

Die Quadrate der Linienelemente der vermittelst der Cosinus $X, Y, Z$ und der anderen $X', Y', Z'$ gebildeten zwei sphärischen Abbildungen ergaben sich aus den Gleichungen:

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + Q^2\right)dz^2 + 2QQ_1 dz d\sigma + Q_1^2 d\sigma^2,$$

$$dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 = \left(\frac{1}{\sigma} + P^2\right)dz^2 + 2PP_1 dz d\sigma + P_1^2 d\sigma^2.$$

Wird für eine Fläche $(\xi, \eta, \zeta)$, welche ein gegebnes reducirtes Linienelement besitzt, die Grösse $P_1$ gleich Null, so artet die *zweite* Abbildung in eine sphärische Linie aus; wird dagegen $Q_1$ gleich Null, so tritt diese Ausartung bei der *ersten* Abbildung ein. Eine gleichzeitige Ausartung beider Abbildungen kann für keine Fläche $(\xi, \eta, \zeta)$ eintreten, da vermöge der letzten der Gleichungen (10) (l. c. pag. 174)

(10)
$$\frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}} = PQ_1 - QP_1$$

ein gleichzeitiges Verschwinden der Grössen $P_1$ und $Q_1$ ausgeschlossen ist. Die zweite der obigen Gleichungen (15) zeigt nunmehr sofort, dass unter der Voraussetzung $P_1 = 0$ die Function $z$ der partiellen Differentialgleichung

$$J(z) = 0$$

genügen muss. Aber dieselbe Function genügt auch, da $Q_1$ von Null verschieden bleibt, der Fundamentalgleichung: (pag. 178 l. c.)

(17)
$$a\sigma + 2\alpha\sigma\Delta_2(z) - \frac{b + 2a\sqrt{\sigma}}{\sqrt{\sigma}}J(z) - 2\beta\sqrt{\sigma}\theta(z) = 0.$$

Die mit der Gleichung $P_1 = 0$ verbundene Singularität kann daher nur eintreten, wenn die Grössen $a, b, \alpha, \beta$ dergestalt angenommen werden, dass die zwei vorstehenden partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ein gemeinschaftliches Integral $z$ zulassen.

Was nun die Differentialgleichung $J(z) = 0$ anbetrifft, so ist sie der Ausdruck für den Umstand, dass die Curven $z =$ Const. auf der Kugel der ersten Abbildung geodätische Linien, d. h. grösseste Kreise werden.[1] Aus der zweiten Columne der Gleichungen (9) (l. c. pag. 173) ergiebt sich, dass unter der Bedingung $P_1 = 0$ oder $J(z) = 0$ die Cosinus $X'$, $Y'$, $Z'$, welche zur degenerirten Abbildung gehören, Functionen von $z$ allein sein müssen. Daher drückt die Orthogonalitätsbedingung:

$$XX' + YY' + ZZ' = 0$$

unter der angenommenen Bedingung ebenfalls aus, dass die zu $z =$ Const. gehörigen Curven der ersten Abbildung aus grössten Kreisen gebildet sind, und stellt das allgemeine Integral der Gleichung $J(z) = 0$ dar.

Durch Einsetzen der aus diesem Integral entwickelten Differentialquotienten der Function $z$ in die Gleichung (17) könnte man die Bedingung der Coexistenz der Gleichung (17) und der Gleichung $J(z) = 0$ durch eine einfache Rechnung erhalten. Allein es ist bequemer, diese Bedingung aus den in meiner Abhandlung gegebnen Gleichungen zu entnehmen.

Die Gleichung (17) ist keine andere als die durch die Gleichung (16) (l. c. pag. 178) dargestellte Integrabilitätsbedingung

$$(16) \qquad -aQ_1 + bP_1 + \alpha Q - \beta P = 0$$

während die Bedingung $P_1 = 0$ mit der Gleichung $J(z) = 0$ zusammenfällt. Daher ist die Bedingung, dass die Gleichung (17) mit der Gleichung $J(z) = 0$ gleichzeitig bestehe, einfach die folgende:

$$-aQ_1 + \alpha Q - \beta P = 0$$

oder, da $P$ und $P_1$ nicht gleichzeitig verschwinden können, auch:

$$(\mathrm{P}) \qquad -aQ_1P + \alpha PQ - \beta P^2 = 0.$$

[1] Da $J(z) = \Delta(z)\Delta_2(z) - \frac{1}{2}\Delta(z, \Delta z)$. Vergl. DARBOUX leçons III pag. 202.

Unter der Voraussetzung $P_1 = 0$ sind die Cosinus $X'$, $Y'$, $Z'$, wie schon bemerkt, Functionen von $z$ allein, und es besteht daher die Gleichung

$$\left(\frac{dX'}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dY'}{dz}\right)^2 + \left(\frac{dZ'}{dz}\right)^2 = \nu'^2 = \frac{1}{\sigma} + P^2$$

in welcher $\nu'$ eine von $\sigma$ unabhängige Grösse bezeichnet.

Aus den Gleichungen

$$(X) \qquad \begin{aligned} X^2 + Y^2 + Z^2 &= 1, \\ XX' + YY' + ZZ' &= 0, \\ X\frac{\partial X'}{\partial z} + Y\frac{\partial Y'}{\partial z} + Z\frac{\partial Z'}{\partial z} &= \frac{1}{\sqrt{\sigma}}, \end{aligned}$$

von denen die letzte sich ohne Weiteres aus den Gleichungen (9) (l. c. pag. 173) ergiebt, erhält man auf bekannte Weise:

$$X = \frac{1}{\nu'^2}\left(Y'\frac{\partial Z'}{\partial z} - Z'\frac{\partial Y'}{\partial z}\right)\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\nu'^2\sqrt{\sigma}}\frac{\partial X'}{\partial z},$$

$$Y = \frac{1}{\nu'^2}\left(Z'\frac{\partial X'}{\partial z} - X'\frac{\partial Z'}{\partial z}\right)\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\nu'^2\sqrt{\sigma}}\frac{\partial Y'}{\partial z},$$

$$Z = \frac{1}{\nu'^2}\left(X'\frac{\partial Y'}{\partial z} - Y'\frac{\partial X'}{\partial z}\right)\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\nu'^2\sqrt{\sigma}}\frac{\partial Z'}{\partial z},$$

und falls man diese Werthe in die folgende Gleichung substituirt:

$$X\frac{\partial^2 X'}{\partial z^2} + Y\frac{\partial^2 Y'}{\partial z^2} + Z\frac{\partial^2 Z'}{\partial z^2} = PQ,$$

welche sich durch Differentiation der letzten der Gleichungen (X) und Berücksichtigung der oft erwähnten Gleichungen (9) ergiebt, so findet man:

$$\frac{\vartheta}{\nu'^2}\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\nu''}{\nu'} = PQ,$$

wenn der Abkürzung wegen:

$$\vartheta = \left| X' \; \frac{dX'}{\partial z} \; \frac{\partial^2 X'}{\partial z^2} \right|, \qquad \nu'' = \frac{d\nu'}{dz}$$

gesetzt wird. Führt man jetzt den Werth des Productes $PQ$, ferner den Werth von $P^2$ und den durch die Gleichung (10) gegebnen Werth von $Q_1 P$ in (P) ein, so stellt sich die Bedingung der Existenz einer gemeinschaftlichen Lösung der Fundamentalgleichung (17) und der Gleichung $J(z) = 0$ in der Form dar:

$$\text{(N)} \qquad -\frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}a + \alpha\left(\frac{\vartheta}{\nu'^2}\sqrt{\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}} + \frac{1}{\sqrt{\sigma}}\frac{\nu''}{\nu'}\right) - \beta\left(\nu'^2 - \frac{1}{\sigma}\right) = 0.$$

Unter der Voraussetzung, dass zunächst die Grösse $\alpha$ nicht der Null gleich sei, und unter Einführung der Abkürzungen:

$$\rho_1 = \frac{2\beta\sqrt{\sigma} - a}{2\sigma a}, \qquad \lambda_1 = -\frac{\beta}{a}\sqrt{\sigma},$$

$$m = \frac{\vartheta}{\nu'^2}, \qquad n = \frac{\nu''}{\nu'}$$

erscheint diese Bedingung in der Gestalt:

$$\text{(N')} \qquad \rho_1 + \lambda_1 \nu'^2 + m\sqrt{\nu'^2\sigma - 1} + n = 0.$$

Die Grössen $\nu'^2$, $m$, $n$ der vorstehenden Gleichung sind von der Variablen $\sigma$ unabhängig. Daher ergiebt sich durch Differentiation nach $\sigma$:

$$\text{(N'')} \qquad \frac{\partial\rho_1}{\partial\sigma} + \nu'^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\sigma} + \frac{m}{2}\frac{\nu'^2}{\sqrt{\nu'^2\sigma - 1}} = 0,$$

und durch Elimination der Function $m$, nach abermaliger Differentiation in Beziehung auf $\sigma$, erscheint schliesslich die Gleichung:

$$(\nu'^2\sigma - 1)\left(\frac{\partial^2\rho_1}{\partial\sigma^2} + \nu'^2\frac{\partial^2\lambda_1}{\partial\sigma^2}\right) + \frac{\nu'^2}{2}\left(\frac{\partial\rho_1}{\partial\sigma} + \nu'^2\frac{\partial\lambda_1}{\partial\sigma}\right) = 0.$$

Zum Bestehen der Bedingungsgleichung (N) ist es daher erforderlich, dass die vorstehende quadratische Gleichung für $\nu'^2$ eine von $\sigma$ unabhängige Wurzel zulasse. Tritt dieser Umstand ein, so folgt durch Integration die Gleichung (N″) zurück. Alsdann bestimmt diese letztere Gleichung die Function $m$ oder vielmehr $\vartheta$ als Function der Variablen $z$. Eine abermalige Integration führt zur Gleichung (N′), aus welcher die Function $n$ bestimmt werden kann.

Aber nur in dem besonderen Falle, dass die so bestimmte Function $n$ sich mit der Function $\frac{\nu''}{\nu'}$ identisch erweist, besteht die ursprüngliche Gleichung (N), und kann die singuläre Bedingung $P_1 = 0$ erfüllt werden. Die Erledigung des Falles, dass die vorstehende quadratische Gleichung für die Function $\nu'^2$ durch jeden Werth dieser Grösse identisch erfüllt würde, bedarf kaum der Andeutung.

Wenn aber die Grösse $\alpha$ als Null vorausgesetzt wird, so giebt die Gleichung (N) ohne Weiteres die Bedingung der Coexistenz der Fundamentalgleichung (17) und der Gleichung $J(z) = 0$ in der Form

$$\frac{1}{\sigma} - \frac{1}{2\sqrt{\sigma^3}}\frac{a}{\beta} = \nu'^2$$

an. Sind die Functionen $a$ und $\beta$ geeignet, diese Bedingung durch eine von $\sigma$ unabhängige Grösse $\nu'^2$ zu erfüllen, so ist damit $\nu'^2$ selbst bestimmt, während die Function $\vartheta$, die ebenfalls von $\sigma$ unabhängig ist, völlig willkürlich bleibt.

Die Kenntniss der zwei Functionen $\nu'^2$ und $\vartheta$ reicht in jedem Falle aus, um auf die Cosinus $X'$, $Y'$, $Z'$ und mit ihnen auf die anderen $X$, $Y$, $Z$ zurückzuschliessen. Nach geschehener Ermittelung derselben würden sich die Coordinaten $\xi, \eta, \zeta$ derjenigen Flächen, für welche die Bedingung $P_1 = 0$ eintreten würde, durch die in meiner Abhandlung angegebenen Quadraturen bestimmen.

Eine einfache, schon am angeführten Orte benützte Buchstabenvertauschung in den vorstehenden Rechnungen würde diejenigen Kriterien ergeben, für welche die Gleichung $Q_1 = 0$ erfüllt sein könnte.

Functionen $a, b, \alpha, \beta$, welche diese Kriterien erfüllen, sind daher durch die Voraussetzung, dass weder $P_1$ noch $Q_1$ für eine der betrachteten Flächen verschwinden dürfen, aus den in meiner Abhandlung gegebnen Entwickelungen ausgeschlossen. Will man solche Functionen zulassen, so würden den durch die Fundamentalgleichungen bestimmten Flächen noch diejenigen hinzuzufügen sein, für welche die betreffende Degeneration der Abbildung eintritt.

Zur vollen Einsicht in das Verhalten der ausgeschlossenen Singularität führt schliesslich die Betrachtung der Transformation, welche die Fundamentalgleichung (17) in die zweite Fundamentalgleichung (17') (l. c,

pag. 181) überführt. Die Formeln diese Transformation vermittelnden Formeln sind an der betreffenden Stelle nicht mitgetheilt worden, ergeben sich aber sofort aus der Combination der oben angegebnen Formeln (15) und (15′) in folgender Gestalt:

$$J(z) = -\frac{\sigma^3}{J'(z)}, \qquad J'(z) = -\frac{\sigma^3}{J(z)},$$

$$\Delta_2(z) = \frac{\sigma(\theta'(z) - \sigma)}{J'(z)}, \qquad \Delta'_2(z) = \frac{\sigma(\theta(z) - \sigma)}{J(z)},$$

$$\theta(z) = \frac{\sigma(J'(z) - \sigma\Delta'_2(z))}{J'(z)}, \qquad \theta'(z) = \frac{\sigma(J(z) - \sigma\Delta_2(z))}{J(z)}.$$

Bezeichnet man durch $A(z)$ die linke Seite der Fundamentalgleichung (17), durch $A'(z)$ diejenige der Fundamentalgleichung (17′) (l. c. pag. 181) so hat man vermöge dieser Transformationsformeln die beiden Identitäten

$$\sigma\sqrt{\sigma}A(z) = -J(z)A'(z),$$

$$\sigma\sqrt{\sigma}A'(z) = J'(z)A(z).$$

Aus ihnen geht hervor, dass jede Function $z$ der Variablen $u, v$ welche $A(z)$ zu Null macht, als Function der Variablen $u', v'$ auch $A'(z)$ zum Verschwinden bringt, wenn diese Function nicht etwa $J(z)$ annulirt, und dass umgekehrt, wenn nicht etwa $J'(z)$ verschwindet, $A'(z)$ mit $A(z)$ gleichzeitig zu Null wird.

Unter der Voraussetzung, dass die Bedingungen, mit denen die Gleichungen $P_1 = 0$ oder $Q_1 = 0$ verträglich sind, ausgeschlossen bleiben, haben daher die Fundamentalgleichungen $A(z) = 0$ und $A'(z) = 0$ den gleichen Umfang an Integralen und bestimmen alle Flächen von dem betreffenden reducirten Linienelement.

## *Berichtigungen zur*

## Tabelle der kleinsten primitiven Wurzeln der Primzahlen unter 5000.

(Bd. 17, S. 315 und 20, S. 153 dieser Zeitschrift.)

Die kleinste primitive Wurzel von 1021 ist 10, die von 3181 ist 7, die von 3191 ist 11, die von 3967 ist 6, die von 4657 ist 15, die von 4751 ist 19.

*G. Wertheim.*

ticularisée des travaux désormais classiques sur ce sujet. Je renvoie donc à cet ouvrage pour citer les grands travaux de M. DARWIN, de M. SCHIAPARELLI, de M. HELMERT, de GYLDÉN etc. En général les auteurs cherchent les causes des variations des latitudes géographiques dans les actions géologiques, l'élasticite, la plasticité terrestre, dans les explosions volcaniques, les troubles météorologiques, la production des glaces etc., c'est à dire en général ils attribuent le phénomène à des causes qui altèrent la distribution des masses sur la surface de la terre.

2. Mais outre les mouvements dont on vient de parler il y en a d'autres qui ont lieu à la surface terrestre, et d'autres aussi peuvent subsister à l'intérieur (dont la grandeur nous est inconnue) qui sans changer à cause de leur nature cyclique les axes d'inertie de la terre ni la grandeur des moments d'inertie, ni la distribution des masses non plus, peuvent exercer une action puissante sur le déplacement des pôles de la terre.

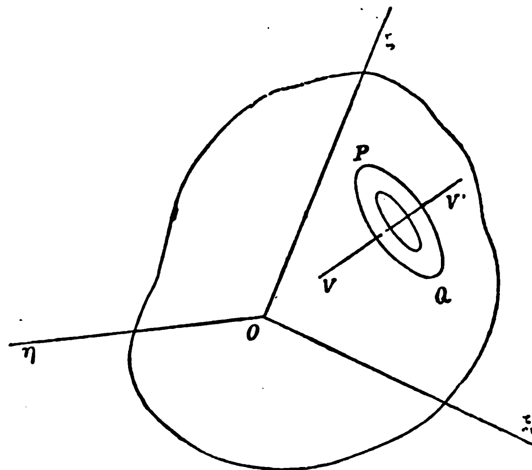
Parmi ces mouvements on peut citer les courants marins constants, les courants atmosphériques, le mouvement continu des eaux des fleuves jusqu'à la mer, leur évaporation et la condensation successive de la vapeur sur les montagnes. Ces mouvements ne changent sensiblement la distribution des masses, ni la forme de la terre et l'on peut même dans une première approximation les regarder comme des mouvements stationnaires. Par rapport aux mouvements de la même nature qui peuvent exister à l'intérieur de la terre on ne peut rien affirmer sur leur grandeur.

Montrons d'une manière tout à fait élémentaire leur influence sur la rotation.

3. A cet effet envisageons un corps dont les axes d'inertie soient $\xi, \eta, \zeta$ et supposons qu'à son intérieur ou à sa surface il y ait un mouvement stationnaire d'une partie de la matière dont il est constitué. Ce mouvement qui aura lieu sous l'action de forces internes ne changera ni la forme ni la distribution des densités. Pour fixer les idées supposons que le corps soit homogène et, par l'effet de forces internes, un tore de revolution $PQ$ tourne relativement au corps autour de son axe $VV'$ avec une vitesse angulaire constante, tandis que la partie résidue du corps soit rigide; ou plus en général le long d'un tube quelconque $PQ$ ait lieu une circulation constante d'un fluide homogène. Le centre de gravité du corps, les axes d'inertie et les moments d'inertie $A, B, C$ ne changeront pas.

Soient $m_1, m_2, m_3$ les moments, par rapports aux axes $\xi, \eta, \zeta$, des quantités de mouvement dues aux mouvements stationnaires internes *quels qu'ils soient*. Si le système a un mouvement de rotation autour du centre de gravité $O$, et si les composantes de la vitesse angulaire sont $p, q, r$, les moments des quantités de mouvement dues au mouvement absolu de tout le système, par rapport aux axes $\xi, \eta, \zeta$, seront

$$Ap + m_1 \ , \ Bq + m_2 \ , \ Cr + m_3 .$$




Supposons que le système ne soit pas soumis à des forces externes; alors le couple de quantité de mouvement sera constant et son axe aura une direction constante. Soit $z$ un axe fixe parallèle à cette direction; $x, y$ soient des axes fixes situés dans le plan invariable et représentons par la table suivante les cosinus des angles que les axes $\xi, \eta, \zeta$ forment avec les axes $x, y, z$:

| | $x$ | $y$ | $z$ |
|---|---|---|---|
| $\xi$ | $\alpha_1$ | $\beta_1$ | $\gamma_1$ |
| $\eta$ | $\alpha_2$ | $\beta_2$ | $\gamma_2$ |
| $\zeta$ | $\alpha_3$ | $\beta_3$ | $\gamma_3$ |

Les trois intégrales des aires seront exprimées par les équations suivantes

$$(1) \qquad \begin{cases} (Ap + m_1)\alpha_1 + (Bq + m_2)\alpha_2 + (Cr + m_3)\alpha_3 = 0, \\ (Ap + m_1)\beta_1 + (Bq + m_2)\beta_2 + (Cr + m_3)\beta_3 = 0, \\ (Ap + m_1)\gamma_1 + (Bq + m_2)\gamma_2 + (Cr + m_3)\gamma_3 = K, \end{cases}$$

$K$ étant la grandeur constante du couple de quantité de mouvement. Dérivons ces équations, et ayons égard aux formules de POISSON

$$(2)\quad \begin{cases} \dfrac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, & \dfrac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r, & \dfrac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \\ \dfrac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q, & \dfrac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r, & \dfrac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p, \\ \dfrac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q, & \dfrac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r, & \dfrac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p, \end{cases}$$

on trouvera

$$L\alpha_1 + M\alpha_2 + N\alpha_3 = 0, \qquad L\beta_1 + M\beta_2 + N\beta_3 = 0, \qquad L\gamma_1 + M\gamma_2 + N\gamma_3 = 0$$

ayant posé

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = L,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = M,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = N.$$

On aura donc les équations

$$(3)\quad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = 0. \end{cases}$$

On a bien aisément deux intégrales algébriques de ces équations. En effet en les ajoutant après les avoir multipliées par $p$, $q$, $r$, on trouve par une intégration

$$(4)\quad \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const.}$$

pourra admettre que dans certaines époques ils se ralentissent, en d'autres époques il deviennent plus rapides. On voit tout de suite qu'on pourra abandonner l'hypothèse des mouvements stationnaires et pour cela il suffira de supposer $m_1$, $m_2$, $m_3$ des fonctions du temps au lieu que des quantités constantes et alors il faudra remplacer les équations (3) par les équations

$$(7) \qquad \begin{cases} A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + m_3q - m_2r + \frac{dm_1}{dt} = 0, \\ B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp + m_1r - m_3p + \frac{dm_2}{dt} = 0, \\ C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq + m_2p - m_1q + \frac{dm_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

qu'on trouvera de la même manière qu'on a employée précédemment. Dans ce cas il restera la seule intégrale (6); l'intégrale (4) ne se vérifiera pas.

4. Le plan des recherches que je me suis proposées est justement d'étudier d'abord l'action toute seule des mouvement cycliques qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses sur la terre, et d'étudier après les perturbations produites par la plasticité et en général par les mouvements qui changent la forme et la constitution de la terre. La première partie a été traitée avec détail dans ce mémoire; de la seconde il n'y a qu'un aperçu au dernier chapitre.

Je crois de cette manière d'avoir envisagé la question d'un point de vue nouveau.

Les mouvements cycliques dont nous avons parlé sont appréciables, du moins en partie, pour les habitants de la terre, mais un observateur qui aurait égard *seulement* à la variation de la forme de la terre et aux variations de sa constitution, c'est à dire à la distribution des masses, ne s'en apercevrait pas. C'est pourquoi par rapport à ses observations il pourrait les appeler, en suivant une locution très-heureuse introduite par Hertz, des *mouvements cachés*.

Nous arrivons par là à une liaison entre le sujet de ce mémoire et les idées imaginées par Hertz en systématisant celles de Helmholtz et de Maxwell, et dont la base est la théorie des mouvements cycliques.

Mais en envisageant de cette manière la question j'ai reconnu qu'il y a encore un autre interêt, dont je vais parler: un interêt qu'on pourrait appeler analytique et fonctionnel.

On connait très-bien la relation qui subsiste entre les transcendantes elliptiques et la théorie de la rotation libre d'un corps rigide. D'après les mémoires classiques de JACOBI cette théorie constitue une des plus belles applications des fonctions Jacobiennes. Or la recherche des rapports entre les mouvements cycliques et la rotation est (comme on le voit tout d'abord) un problème beaucoup plus compliqué que celui de JACOBI de la rotation d'un corps rigide; cependant je montrerai que ce sont toujours les fonctions elliptiques et Jacobiennes qui suffisent pour la résolution complète de la question, même dans le cas le plus général. Je donnerai en effet dans ce mémoire la solution complète. On verra que ces transcendantes paraissent toujours sous des expressions rationnelles ou sous des exponentielles, mais d'une manière différente que dans la solution de JACOBI.

Nous allons donner en peu de mots une idée de ces résultats et pour cela nous faisons usage dès à présent de la terminologie d'HELMHOLTZ,[1] qu'on va rappeler. Les coordonnées indépendantes d'un système peuvent être classées en deux catégories: les coordonnées cycliques et les paramètres. Les premières existent dans un système lorsqu'il y a des mouvements possibles qui n'altèrent pas la distribution des masses et qui produisent un échange cyclique des masses. Un mouvement est dit cyclique lorsqu'on peut se borner à considérer dans l'expression de la force vive les termes qui dépendent seulement des intensités cycliques.[2] Il est évident qu'un mouvement rigoureusement cyclique n'existera que si tous les paramètres seront constants.

Cela posé envisageons un système dont les liaisons n'empêchent pas la rotation autour d'un point. Les variables qui déterminent sa configuration seront, outre celles qui définissent la position variable d'un système d'axes ayant l'origine dans le point fixe, un certain nombre de coordonnées cycliques et de paramètres. Nous supposerons que les coordonnées cycliques et les paramètres suffisent pour définir le mouvement

---

[1] *Principien der Statik monocyklischer Systeme.* Crelle's Journal, Bd. 97.

[2] Le cas appelé d'*ignoration of coordinates* avait été examiné par THOMSON et TAIT, *Treatise on natural philosophy,* Vol. I, Part. I, Art. 319.

relatif par rapport aux axes. Nous regarderons ce mouvement comme le mouvement interne du système et nous supposerons qu'il soit cyclique.

Faisons d'abord l'hypothèse que les axes soient fixes et que les paramètres soient constants. Si on abandonne le système à son inertie les moments cycliques et par conséquent les intensités cycliques seront des quantités constantes. C'est pourquoi dans ce cas *le mouvement sera dans le même temps adiabatique et isocyclique.*

Supposons maintenant que les axes puissent tourner librement et le mouvement interne soit maintenu isocyclique, les paramètres étant constants. C'est le cas d'un système dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.

Alors si le système n'est soumis à aucun couple de rotation nous démontrerons au chapitre II que, *les composantes de la rotation seront des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes seront des fonctions uniformes du temps représentables par des fonctions Jacobiennes.*

On peut demander dans ce cas *s'il faut des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne.* On trouve qu'en général elles sont nécessaires et *qu'on peut en déterminer les expressions par des fonctions elliptiques du temps.*

La nécessité des forces dont nous venons de parler prouve que *de la même manière que le mouvement interne altère la rotation, celle-ci a en général une influence sur les mouvements internes.* C'est pourquoi on peut se poser la question suivante: *A l'intérieur d'un système qui peut tourner autour d'un point fixe et qui est abandonné à son inertie existent des mouvements cycliques quelconques (les paramètres étant constants). Comment a lieu la rotation et quelles lois suivent les intensités cycliques, à cause des actions mutuelles que ces mouvements exercent entre eux?*

Cette question qu'on peut appeler le problème général du *mouvement adiabatique* parait au premier abord très-compliquée car on peut imaginer les mouvements cycliques internes d'une manière tout à fait arbitraire. Cependant nous montrerons au chapitre IV qu'on peut la résoudre complètement en employant un théorème par lequel on ramène ce cas à celui d'un mouvement isocyclique, de manière que même dans ce cas *les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps et les cosinus des angles que les axes mobiles forment avec les axes fixes s'expriment par*

*des fonctions Jacobiennes. En outre les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps.* Le problème peut être aussi généralisé en regardant comme isocyclique une partie seulement des mouvement internes et en supposant que les forces correspondantes aux autres coordonnées cycliques soient nulles, et la solution s'obtient toujours de la même manière. On voit par là que le champ des problèmes sur la mécanique des systèmes d'où ressortent les fonctions elliptiques et Jacobiennes est beaucoup plus large que celui compris dans les recherches classiques de JACOBI, car il embrasse le problème général du mouvement adiabatique et isocyclique d'un système quelconque.

6. Il nous reste à indiquer de quelle manière a été faite la division en chapitres du mémoire.

Les premiers trois chapitres traitent du mouvement d'un système à l'intérieur duquel existent des mouvements stationnaires. Dans le premier chapitre il y a une étude géométrique faite avec les vues de POINSOT; le second chapitre renferme la solution analytique complète, et le troisième est consacré à la recherche des rotations permanentes, de leur stabilité, des oscillations du pôle autour de ses positions stables et des perturbations correspondantes de la période eulérienne.

Le quatrième chapitre traite en général des mouvements cycliques et renferme les résultats dont nous venons de donner un aperçu.

Dans le cinquième chapitre, après l'étude du cas général des mouvements internes qui n'altèrent ni la forme ni la distribution des masses, et la résolution du problème de déterminer les mouvements internes, étant donné d'une manière arbitraire le mouvement du pôle, on trouvera quelques applications au mouvement de la terre. J'ai cherché par des calculs approximatifs de déterminer les mouvements internes cycliques qui correspondent aux mouvements harmoniques du pôle découverts par M. CHANDLER. Cet éminent astronome a trouvé dans le mouvement du pôle une période d'environ 430 jours. Si le couple de quantité de mouvement des mouvements internes avait une composante dans la direction de l'axe terrestre égale a $\frac{1}{1053}$ du couple de quantité de mouvement de la terre supposée rigide, la période eulérienne deviendrait celle de M. CHANDLER.

Sans discuter ce résultat je cherche quels seraient les mouvements internes cycliques capables de déterminer dans le pôle le mouvement

harmonique ayant la période annuelle dont M. CHANDLER a déterminé les éléments. Les résultats obtenus sont renfermés dans quelques théorèmes qui sont énoncés au § 3 de l'Art. V.

Je remarquerai ici seulement que *l'axe du couple de quantité de mouvement correspondant oscille de manière que la projection sur l'équateur de son extémité (l'origine étant au centre de la terre) décrit une ellipse dont j'ai calculé la grandeur des axes, et dont le grand axe est situé dans le méridien ayant la longitude de* 45° (par rapport au méridien de Greenwich) *c'est à dire dans le méridien qui passe au milieu de l'océan atlantique.*

Enfin le dernier chapitre renferme un aperçu des perturbations qu'on a dans les lois précédemment trouvées par l'hypothèse de la plasticité terrestre. Cette étude est à peine ébauchée, c'est pourquoi j'espère de pouvoir exposer dans un autre mémoire des nouvelles études dans cette direction ainsi que dans l'hypothèse générale des mouvements cycliques lorsque les paramètres ne sont pas constants et de pouvoir enfin approfondir les applications de ces recherches.

---

# CHAPITRE I.

## *L'étude géométrique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.*

### Article I.

1. Il est possible de se faire une idée claire du mouvement sans recourir à l'intégration complète des équations différentielles (3). Il suffit pour cela d'envisager les intégrales algébriques de ces équations qu'on a trouvées (Introduction § 3) de la même manière que POINSOT a fait dans ses recherches sur la rotation libre d'un corps.

Nous commencerons par nous proposer la solution des deux problèmes suivants:

1°) Déterminer toutes les positions de l'axe instantané de rotation par rapport au corps en mouvement.

2°) Déterminer la vitesse angulaire de rotation du corps pour chaque position de l'axe.

Soit

$$(1)_a \qquad A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1$$

l'équation de l'ellipsoïde d'inertie par rapport au centre de gravité $O$ et soit $P$ son intersection avec l'axe de rotation. On peut appeler $P$ le *pôle* et la courbe qu'il décrit sur l'ellipsoïde la *polodie*.

Si l'on pose

$$OP = \rho, \qquad \omega = \sqrt{p^2 + q^2 + r^2}$$

on aura que les coordonnées du pôle seront

$$(2)_a \qquad \xi = \rho\frac{p}{\omega}, \qquad \eta = \rho\frac{q}{\omega}, \qquad \zeta = \rho\frac{r}{\omega}$$

d'où (voir (4) et $(1)_a$)

$$\frac{\rho^2}{\omega^2}2h = 1$$

c'est à dire

$$\omega = \rho\sqrt{2h}.$$

Par suite *la vitesse de rotation sera proportionnelle au rayon vecteur OP.* On a ainsi la solution de la deuxième question que nous nous sommes proposée.

On déduit des équations $(2)_a$

$$p = \xi\sqrt{2h}, \qquad q = \eta\sqrt{2h}, \qquad r = \zeta\sqrt{2h}$$

et en substituant dans l'équation (5)

$$(3)_a \qquad A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 + \frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi + Bm_2\eta + Cm_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}.$$

Les équations de la polodie seront donc les deux équations $(2)_a$ et $(3)_a$. La dernière équation peut s'écrire encore

$$A^2\left(\xi + \frac{m_1}{A\sqrt{2h}}\right)^2 + B^2\left(\eta + \frac{m_2}{B\sqrt{2h}}\right)^2 + C^2\left(\zeta + \frac{m_3}{C\sqrt{2h}}\right)^2 = \frac{K^2}{2h}.$$

On peut donc envisager la polodie comme l'intersection de l'ellipsoïde d'inertie avec l'ellipsoïde ayant pour équation

$$A^2\xi^2 + B^2\eta^2 + C^2\zeta^2 = \frac{K^2}{2h}$$

transporté par une translation de manière que son centre ait pour coordonnées

$$-\frac{m_1}{A\sqrt{2h}}, \quad -\frac{m_2}{B\sqrt{2h}}, \quad -\frac{m_3}{C\sqrt{2h}}.$$

La première question est donc aussi résolue.

2. Dans le cas étudié par Poinsot le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle est parallèle au plan invariable et il est un plan fixe. Cette propriété ne se vérifie pas dans le cas que nous étudions. Cependant on a des propriétés analogues qu'il est intéressant d'examiner.

Le plan polaire, c'est à dire le plan $\pi$ qui est tangent à l'ellipsoïde d'inertie au pôle, a par rapport aux axes coordonnées $\xi, \eta, \zeta$ l'équation

$$(4)_a \qquad Ap\xi + Bq\eta + Cr\zeta = \sqrt{2h}.$$

Conduisons les deux droites $OK$, $OM$. La première soit l'axe du couple de quantité de mouvement; l'autre ait pour projections sur $\xi, \eta, \zeta$ les trois quantités $m_1$, $m_2$, $m_3$. On pourra appeler ce dernier vecteur *l'axe des mouvements internes.*

Les coordonnées des points $M$ et $K$ seront respectivement

$$m_1\ ,\ m_2\ ,\ m_3,$$
$$Ap + m_1\ ,\ Bq + m_2\ ,\ Cr + m_3.$$

On tire de là que *le plan polaire est toujours perpendiculaire à la droite qui va de l'extrémité de l'axe des mouvements internes à celle de l'axe du couple de quantité de mouvement.* La droite $MK$ est donnée par

$$MK = \sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}$$

et la distance $OD$ entre $O$ et le plan polaire est

$$OD = \frac{\sqrt{2h}}{\sqrt{A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2}}$$

par suite: ***la distance entre le centre de gravité et le plan polaire est en raison inverse de la distance entre les extrémités de l'axe des mouvements internes et de l'axe du couple de quantité de mouvement.***

Par rapport aux axes fixes $x, y, z$ l'équation du plan polaire sera

$$\begin{aligned}(Ap\alpha_1 + Bq\alpha_2 + Cr\alpha_3)x + (Ap\beta_1 + Bq\beta_2 + Cr\beta_3)y \\ + (Ap\gamma_1 + Bq\gamma_2 + Cr\gamma_3)z = \sqrt{2h}\end{aligned}$$

c'est à dire, à cause des équations (1),

$$\begin{aligned}-(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)x - (m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3)y \\ -(m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3)z = \sqrt{2h}.\end{aligned}$$

L'équation du plan polaire au temps $t + dt$, sera

$$\begin{aligned}-(m_1\alpha_1 + m_2\alpha_2 + m_3\alpha_3)x - (m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3)y - (m_1\gamma_1 + m_2\gamma_2 + m_3\gamma_3)z \\ -(m_1 d\alpha_1 + m_2 d\alpha_2 + m_3 d\alpha_3)x - (m_1 d\beta_1 + m_2 d\beta_2 + m_3 d\beta_3)y \\ -(m_1 d\gamma_1 + m_2 d\gamma_2 + m_3 d\gamma_3)z = \sqrt{2h},\end{aligned}$$

c'est pourquoi l'intersection du plan polaire au temps $t$ et du plan polaire au temps $t + dt$ sera une droite du plan

$$\begin{aligned}(m_1 d\alpha_1 + m_2 d\alpha_2 + m_3 d\alpha_3)x + (m_1 d\beta_1 + m_2 d\beta_2 + m_3 d\beta_3)y \\ + (m_1 d\gamma_1 + m_2 d\gamma_2 + m_3 d\gamma_3)z = 0.\end{aligned}$$

Divisant par $dt$, et ayant égard aux formules (2) cette équation peut s'écrire

$$\begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3 \\ p, & q, & r \end{vmatrix} x + \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \beta_1, & \beta_2, & \beta_3 \\ p, & q, & r \end{vmatrix} y + \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \gamma_1, & \gamma_2, & \gamma_3 \\ p, & q, & r \end{vmatrix} z = 0$$

d'où l'on tire

$$(5)_a \qquad \begin{vmatrix} m_1, & m_2, & m_3 \\ \xi, & \eta, & \zeta \\ p, & q, & r \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation est celle du plan $POM$.

La droite $PH$ où se rencontrent les deux plans polaires correspondants aux temps $t$, et $t + dt$ peut être regardée comme l'axe instantané autour duquel tourne le plan polaire au temps $t$. On aura donc: *Le plan polaire tourne à chaque instant autour de la droite où il rencontre le plan conduit par le pôle et par l'axe des mouvements internes.*

3. On peut mener par chaque point de la polodie la droite autour de laquelle le plan polaire doit tourner. Le lieu de ces droites sera une surface tangente à l'ellipsoïde d'inertie le long de la polodie et qui sera liée invariablement au corps en mouvement. Appelons cette surface la *surface axiale,* alors *le mouvement du corps aura lieu de sort que l'ellipsoïde d'inertie roulera sur le plan polaire, tandis que celui-ci tournera à chaque instant autour de la génératrice où il rencontre la surface axiale.* L'équation de la surface axiale s'obtiendra par l'élimination de $p, q, r$, entre les équations (4), (5), $(4)_a$, $(5)_a$.

## Article II.

1. Nous allons généraliser aux mouvements que nous étudions un théorème bien connu donné par Sylvester pour les mouvements à la Poinsot.

Posons dans les équations (3)

$$A = \frac{1}{a}, \qquad B = \frac{1}{b}, \qquad C = \frac{1}{c}$$

on aura

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} + \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{b}\right)qr + m_3 q - m_2 r = 0,$$

$$\frac{1}{b}\frac{dq}{dt} + \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{c}\right)rp + m_1 r - m_3 p = 0,$$

$$\frac{1}{c}\frac{dr}{dt} + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)pq + m_2 p - m_1 q = 0,$$

et les intégrales (4) et (6) deviendront

$$\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c} = 2h,$$

$$\left(\frac{p}{a} + m_1\right)^2 + \left(\frac{q}{b} + m_2\right)^2 + \left(\frac{r}{c} + m_3\right)^2 = 1,$$

en supposant qu'on change les unités de manière que la constante $K$ soit égale à 1.

2. Supposons maintenant que l'on compose le mouvement avec une rotation uniforme $\omega$ autour de l'axe du couple de quantité de mouvement. Alors les trois composantes de la rotation deviendront

$$p' = p + \omega\left(\frac{p}{a} + m_1\right) = p\left(\frac{a+\omega}{a}\right) + \omega m_1,$$

$$q' = q + \omega\left(\frac{q}{b} + m_2\right) = q\left(\frac{b+\omega}{b}\right) + \omega m_2,$$

$$r' = r + \omega\left(\frac{r}{c} + m_3\right) = r\left(\frac{c+\omega}{c}\right) + \omega m_3,$$

d'où

$$p = \frac{p'a}{a+\omega} - \frac{m_1 \omega a}{a+\omega},$$

$$q = \frac{q'b}{b+\omega} - \frac{m_2 \omega b}{b+\omega},$$

$$r = \frac{r'c}{c+\omega} - \frac{m_3 \omega c}{c+\omega}.$$

Posons

$$a + \omega = a', \qquad b + \omega = b', \qquad c + \omega = c',$$

$$m_1 \frac{a}{a+\omega} = m_1', \qquad m_2 \frac{b}{b+\omega} = m_2', \qquad m_3 \frac{c}{c+\omega} = m_3',$$

alors les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{p'}{a'} + m_1' = \frac{p}{a} + m_1,$$

$$\frac{q'}{b'} + m_2' = \frac{q}{b} + m_2,$$

$$\frac{r'}{c'} + m_3' = \frac{r}{c} + m_3,$$

et par suite on aura

$$\frac{1}{a'}\frac{dp'}{dt} + \left(\frac{1}{c'} - \frac{1}{b'}\right)q'r' + m_3'q' - m_2'r' = 0,$$

$$\frac{1}{b'}\frac{dq'}{dt} + \left(\frac{1}{a'} - \frac{1}{c'}\right)r'p' + m_1'r' - m_3'p' = 0,$$

$$\frac{1}{c'}\frac{dr'}{dt} + \left(\frac{1}{b'} - \frac{1}{a'}\right)p'q' + m_2'p' - m_1'q' = 0,$$

$$\left(\frac{p'}{a'} + m_1'\right)^2 + \left(\frac{q'}{b'} + m_2'\right)^2 + \left(\frac{r'}{c'} + m_3'\right)^2 = 0,$$

$$\frac{p'^2}{a'} + \frac{q'^2}{b'} + \frac{r'^2}{c'} = 2h'.$$

Entre les deux quantités constantes $h$ et $h'$ subsistera la relation

$$h' = h + \frac{\omega}{2}\left(1 - \frac{m_1^2 a}{a+\omega} - \frac{m_2^2 b}{b+\omega} - \frac{m_3^2 c}{c+\omega}\right).$$

Donc *si on compose le mouvement que nous étudions avec une rotation uniforme autour de l'axe du couple de quantité de mouvement, la nature du mouvement ne changera pas; il n'y aura qu'un changement des constantes.*

Cette propriété est tout à fait analogue à celle qui a été découverte par SYLVESTER dans le cas des mouvements à la POINSOT et dont on trouve des nombreuses et intéressantes applications dans les travaux de M. DARBOUX et de HALPHEN.

### Article III.

1. Nous consacrerons un chapitre (chapitre III) à l'étude des mouvements permanents et à leur stabilité, mais dès à présent nous voulons examiner quelques propriétés des mouvements permanents.

Puisqu'on doit avoir

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.},$$

un axe de rotation sera permanent lorsque $p, q, r$ seront constants, c'est à dire si l'on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{dq}{dt} = \frac{dr}{dt} = 0$$

et par suite (voir équations (3))

$$(6)_a \qquad \left\{ \begin{aligned} &(C-B)qr + m_3 q - m_2 r = 0, \\ &(A-C)rp + m_1 r - m_3 p = 0, \\ &(B-A)pq + m_2 p - m_1 q = 0, \end{aligned} \right.$$

d'où l'on tire

$$(6')_a \qquad \frac{p}{Ap + m_1} = \frac{q}{Bq + m_2} = \frac{r}{Cr + m_3}.$$

2. Les points multiples de la polodie se trouvent où les deux surfaces $(1)_a$, $(3)_a$ sont tangentes. Les coordonnées du pôle sont

$$\frac{p}{\sqrt{2h}}, \frac{q}{\sqrt{2h}}, \frac{r}{\sqrt{2h}}$$

par conséquent les plans tangents aux deux surfaces au pôle auront pour équations

$$\frac{Ap}{\sqrt{2h}}\xi + \frac{Bq}{\sqrt{2h}}\eta + \frac{Cr}{\sqrt{2h}}\zeta = 1,$$

$$A(Ap+m_1)\left(\xi - \frac{p}{\sqrt{2h}}\right) + B(Bq+m_2)\left(\eta - \frac{q}{\sqrt{2h}}\right) + C(Cr+m_3)\left(\zeta - \frac{r}{\sqrt{2h}}\right) = \frac{K_1}{2h}$$

et ils coïncideront lorsque

$$\frac{p}{Ap + m_1} = \frac{q}{Bq + m_2} = \frac{r}{Cr + m_3}.$$

Donc: *les axes permanents de rotation passent par le centre de gravité et par les points multiples de la polodie, et si la polodie a un point multiple la vitesse de rotation correspondante sera celle de la rotation permanente.*

3. Revenons maintenant aux équations (3). Elles seront satisfaites si l'on substitue aux fonctions $p(t)$, $q(t)$, $r(t)$ les autres fonctions

$$-p(T-t), \ -q(T-t), \ -r(T-t),$$

$T$ étant une constante arbitraire; et en remplaçant dans le même temps $m_1, m_2, m_3$ par $-m_1, -m_2, -m_3$. On pourra énoncer cette propriété en disant: *le mouvement du système peut s'invertir si l'on invertit l'axe des mouvements internes.*

Cela posé, supposons que, la polodie ayant un point multiple $P_0$, le pôle puisse rejoindre ce point après un temps $T$. Si l'on invertit le mouvement le pôle reviendra au point de départ après le même temps. Mais l'axe de rotation et la vitesse qui correspondent à $P_0$ sont permanents, donc le pôle ne pourrait plus bouger de $P_0$. On a donc: *Si la polodie a un point multiple, le pôle s'approchera indéfiniment à ce point sans jamais le rejoindre.*

Cela constitue une différence essentielle entre les mouvements qui ont lieu lorsque la polodie a des points multiples, et ceux qui ont lieu lorsque elle n'en a pas. Dans le premier cas la polodie sera une courbe fermée et le pôle reviendra au point de départ; dans le deuxième cas le pôle ne reviendra au point de départ mais il s'approchera indéfiniment au point multiple.

## Article IV.

1. Dans cet article nous particulariserons les formules dans le cas où l'ellipsoïde d'inertie a deux axes égaux, et le troisième est plus petit que les autres.

Supposons $A = B$, et prenons les axes $\xi$, $\eta$ dans le plan de l'équa-

teur de manière que l'axe des mouvements internes soit dans le plan $\xi\zeta$. Alors on aura $m_2 = 0$, et les équations de la polodie deviendront

$$A(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2=1,$$
$$A^2(\xi^2+\eta^2)+C^2\zeta^2+\frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi+Cm_3\zeta)=\frac{K_1}{2h}$$

ou bien

$$A(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2=1,$$
$$C(C-A)\zeta^2+\frac{2}{\sqrt{2h}}(Am_1\xi+Cm_3\zeta)=\frac{K_1}{2h}-A.$$

Posons pour simplifier

$$-\frac{Cm_3}{C(C-A)\sqrt{2h}}=\zeta_0,$$
$$\frac{C^2m_3^2+(K-2Ah)C(C-A)}{2\sqrt{2h}\,AC(C-A)m_1}=\xi_0,$$
$$\frac{Am_1}{C(C-A)\sqrt{2h}}=P.$$

Les deux équations précédentes s'écriront

$$A(\xi^2+\eta^2)+C\zeta^2=1,$$
$$(\zeta-\zeta_0)^2=2P(\xi_0-\xi).$$

On déduit de là que *la projection de la polodie sur le méridien qui passe par l'axe des mouvements internes, est une parabole dont l'axe est perpendiculaire à l'axe de symétrie de l'ellipsoïde.*

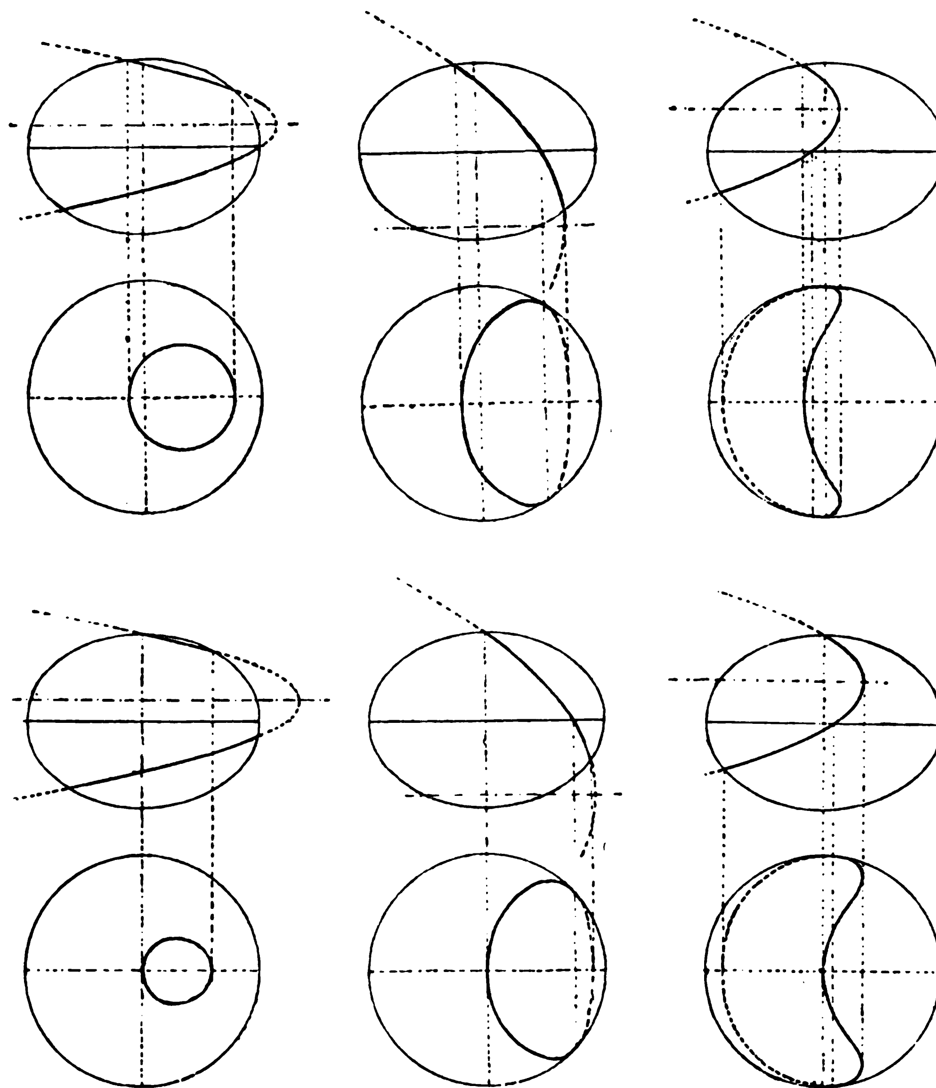
Les coordonnées du sommet de la parabole seront $\xi_0$ et $\zeta_0$ et le semi-paramètre sera $P$.

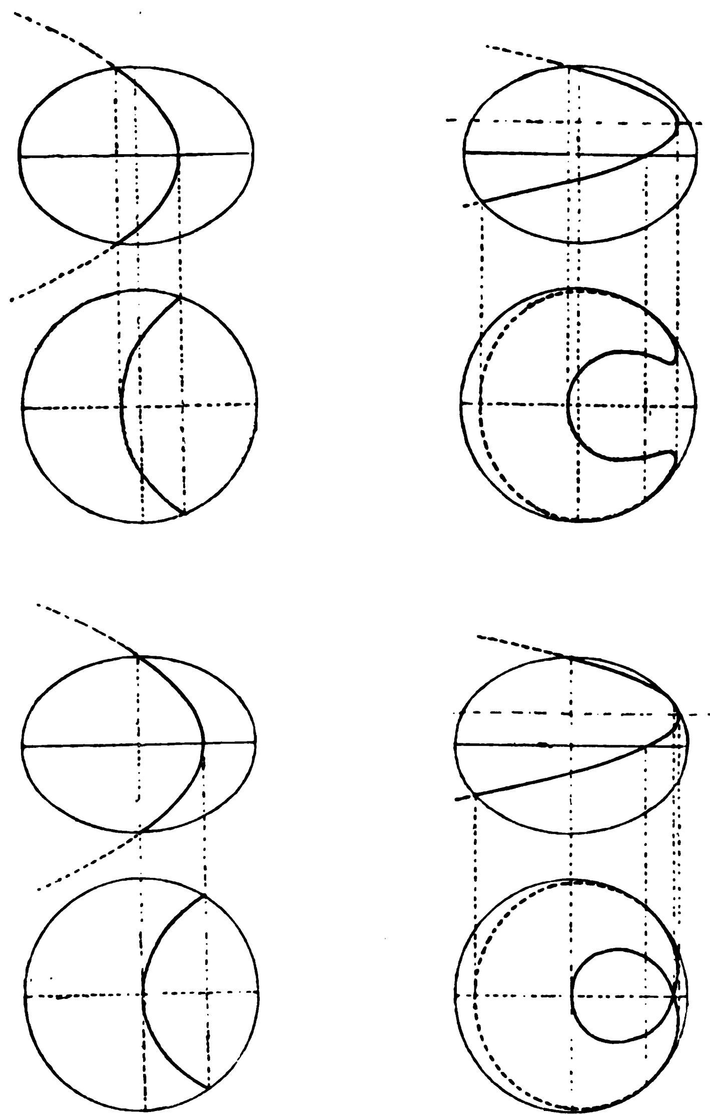
2. Le théorème précédent conduit à une construction très simple de la polodie par l'emploi des méthodes bien connues de la géométrie descriptive.

Il suffit de choisir pour 1$^{er}$ plan de projection un plan parallèle à l'équateur et de prendre le 2$^d$ plan de projection parallèle à l'axe de symétrie et à l'axe des mouvements internes. L'ellipsoïde d'inertie sera projecté sur le premier plan dans un cercle, et sur le second dans une ellipse. La projection de la polodie dans ce plan sera une parabole ayant l'axe parallèle à l'équateur. On obtiendra donc la polodie en la regardant

comme l'intersection de l'ellipsoïde avec un cylindre dont la directrice est une parabole et qui est perpendiculaire au second plan de projection. C'est pourquoi il n'y a pas de difficulté pour construire la première projection de la polodie.

Par ce procédé nous avons dessiné les projections de plusieurs polodies qu'on a obtenues en changeant la position de sommet et la grandeur du paramètre de la parabole.





3. L'avant-dernière figure correspond au cas où il peut arriver une inversion des pôles, c'est à dire que le pôle peut passer d'un bout à l'autre du petit axe de l'ellipsoïde.

Pour cela sont nécessaires et suffisantes deux conditions, savoir

1°) la parabole doit passer par les projections des extrémités du petit axe.

2°) le sommet de la parabole doit se trouver à l'intérieur de la projection de l'ellipsoïde.

Ces conditions seront vérifiées lorsqu'on aura

$$(7)_a \qquad \zeta_0 = 0,$$

$$(8)_a \qquad \xi_0 < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

De la première on tire

$$m_3 = 0,$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{K_1 - 2Ah}{2\sqrt{2h}\, Am_1}.$$

Lorsque le pôle sera à un bout du petit axe on aura

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = r_0$$

d'où

$$Cr_0^2 = 2h, \qquad C^2 r_0^2 = K_1$$

et par suite

$$\xi_0 = \frac{C_0 r_0^2 (C - A)}{2\sqrt{Cr_0^2}\, Am_1}.$$

Ayant égard à l'équation $(8)_a$ on aura

$$\frac{Cr_0^2(C - A)}{2\sqrt{Cr_0^2}\, Am_1} < \frac{1}{\sqrt{A}}.$$

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il arrive l'inversion des pôles seront donc

$$m_1 > \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{A}}(C - A) r_0, \qquad m_3 = 0.$$

4. On peut examiner aussi le cas où l'ellipsoïde d'inertie se réduit à une sphère.

Si $A = B = C$, les équations de la polodie deviennent

$$A(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) = 1,$$

$$A^2(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2) + \frac{2A}{\sqrt{2h}}(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) = \frac{K_1}{2h}.$$

La polodie sera donc l'intersection de la sphère d'inertie avec le plan

$$\frac{2A}{\sqrt{2h}}(m_1\xi + m_2\eta + m_3\zeta) = \frac{K_1}{2h} - A$$

et par conséquent elle sera un cercle de la sphère ayant pour axe, l'axe des mouvements internes.

Dans ce cas les équations (3) sont des équations linéaires qui peuvent s'intégrer immédiatement. En effet si on fait coïncider l'axe $\xi$ avec l'axe des mouvements internes, elles deviendront

$$A\frac{dp}{dt} = 0, \qquad \frac{dq}{dt} + \frac{m}{A}r = 0, \qquad \frac{dr}{dt} - \frac{m}{A}r = 0$$

d'où

$$p = a_1, \qquad q = a_2 \cos\left(\frac{m}{A}t + a_3\right), \qquad r = a_2 \sin\left(\frac{m}{A}t + a_3\right),$$

$a_1$, $a_2$, $a_3$ étant des constantes arbitraires.

Le pôle se mouvra sur la polodie avec une vitesse constante et la période d'une révolution sera $\frac{2\pi A}{m}$.

Dans ce cas l'amplitude de la polodie ne dépendra nullement de la grandeur de l'axe des mouvements internes, mais seulement de sa direction par rapport à l'axe initial de rotation.

### Article V.

1. Les mouvements des systèmes que nous venons d'étudier géométriquement et que nous allons étudier analytiquement dans le chapitre suivant sont une généralisation des mouvements à la Poinsot.

Nous consacrerons cet article à réduire les équations différentielles des mouvements à la Poinsot, celles que nous étudions et d'autres plus générales à un même type. Cette transformation appartient à la partie cinématique de la recherche, c'est pourquoi nous la plaçons dans ce chapitre.

Un mouvement à la Poinsot est le mouvement d'un système d'axes qui tourne autour de l'origine fixe de sorte que les composantes de la rotation ont des rapports constants avec les cosinus des angles que les axes forment avec une direction fixe.

Si $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont les cosinus, $p, q, r$ les composantes de la rotation et $a, b, c$ les rapports constants, on aura

$$p = a\gamma_1, \qquad q = b\gamma_2, \qquad r = c\gamma_3$$

d'où l'on tire, à cause des équations de POISSON, (Introduction § 3)

$$\frac{dp}{dt} = a\frac{d\gamma_1}{dt} = a(r\gamma_2 - q\gamma_3), \qquad \frac{dq}{dt} = b\frac{d\gamma_2}{dt} = b(p\gamma_3 - r\gamma_1),$$

$$\frac{dr}{dt} = c\frac{d\gamma_3}{dt} = c(q\gamma_1 - p\gamma_2)$$

ou bien

$$\frac{1}{a}\frac{dp}{dt} = \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{c}\right)qr, \qquad \frac{1}{b}\frac{dq}{dt} = \left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right)rp, \qquad \frac{1}{c}\frac{dr}{dt} = \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)pq.$$

Si nous posons

$$f_1 = \frac{abc}{2}\left(\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} + \frac{r^2}{c^2}\right),$$

$$f_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{p^2}{a} + \frac{q^2}{b} + \frac{r^2}{c}\right)$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}$$

et on aura

$$\gamma_1 = \frac{\partial f_2}{\partial p}, \qquad \gamma_2 = \frac{\partial f_2}{\partial q}, \qquad \gamma_3 = \frac{\partial f_2}{\partial r}.$$

2. Au même type d'équations appartiennent les équations différentielles du mouvement d'un corps dans lequel existent des mouvements internes stationnaires. En effet posons

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}((Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2),$$

$$f_2 = \frac{1}{2\sqrt{ABC}}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2).$$

Alors on pourra écrire les équations (3) de la manière suivante

$$\frac{dp}{dt}=\frac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(q,r)},\qquad \frac{dq}{dt}=\frac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(r,p)},\qquad \frac{dr}{dt}=\frac{d(\mathfrak{f}_1,\mathfrak{f}_2)}{d(p,q)}.$$

Pour avoir les cosinus $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il suffit de construire la fonction

$$F=\frac{1}{2}(Ap^2+Bq^2+Cr^2+2m_1p+2m_2q+2m_3r)$$

et l'on aura

$$\gamma_1=\frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial p},\qquad \gamma_2=\frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial q},\qquad \gamma_3=\frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial r}.$$

Entre les fonctions $\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2, F$ subsisteront les relations

$$\mathfrak{f}_1=\frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\mathfrak{f}_2=\frac{1}{2\sqrt{ABC}}\left(p\frac{\partial F}{\partial p}+q\frac{\partial F}{\partial q}+r\frac{\partial F}{\partial r}-F\right).$$

3. En général si on a un système d'axes en mouvement autour de l'origine fixe et les cosinus des angles qu'ils forment avec une direction fixe sont donnés par les formules

$$\gamma_1=\frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial p},\qquad \gamma_2=\frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial q},\qquad \gamma_3=\frac{1}{K}\frac{\partial F}{\partial r},$$

$K$ étant une constante et $F$ une fonction quelconque de $p, q, r$ on aura à cause des équations de Poisson

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p}=r\frac{\partial F}{\partial q}-q\frac{\partial F}{\partial r},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q}=p\frac{\partial F}{\partial r}-r\frac{\partial F}{\partial p},\qquad \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r}=q\frac{\partial F}{\partial p}-p\frac{\partial F}{\partial q}.$$

Calculons les premiers membres de ces équations, on aura

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p}=\frac{\partial^2 F}{\partial p^2}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial r}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q}=\frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial q^2}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial q\,\partial r}\frac{dr}{dt},$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r}=\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial p}\frac{dp}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial q}\frac{dq}{dt}+\frac{\partial^2 F}{\partial r^2}\frac{dt}{dt}.$$

On tire de là

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{d}{dt}\frac{\partial F}{\partial r} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial r} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial q}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H}\left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial p}, & \frac{\partial F}{\partial q}, & \frac{\partial F}{\partial r} \\ p, & q, & r \end{matrix} \right\Vert \cdot \left\Vert \begin{matrix} \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q^2}, & \frac{\partial^2 F}{\partial q \partial r} \\ \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial p}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r \partial q}, & \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \end{matrix} \right\Vert$$

$$= \frac{1}{H}\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial q}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right], & \frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right] \\ \frac{\partial}{\partial q}\left[p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F\right], & \frac{\partial}{\partial r}\left[p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F\right] \end{vmatrix}$$

$H$ étant le Hessien de la fonction $F$.

Posons

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right],$$

$$\varphi_2 = p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F,$$

on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(q, r)}.$$

D'une manière tout à fait analogue on trouvera

$$\frac{dq}{dt} = \frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{1}{H}\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(p, q)}.$$

Si nous introduisons une variable auxiliare $\tau$, telle que

$$\frac{dt}{d\tau} = H$$

les équations précédentes pourront s'écrire

$$(9)_a \qquad \frac{dp}{d\tau} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{d\tau} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{d\tau} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(p, q)},$$

$$(10)_a \qquad \frac{dt}{d\tau} = H.$$

Ces équations ont les intégrales $\varphi_1 = \text{const.}$, $\varphi_2 = \text{const.}$ et s'intègrent par une quadrature.

Les trois premières équations appartiennent au même type d'équations qu'on a trouvé auparavant.

4. Lorsque $F$ est de $2^d$ degré, $\varphi_1$ et $\varphi_2$ seront aussi des fonctions de $2^d$ degré et $H$ sera une quantité constante.

Alors si on intègre l'équation $(10)_a$ on trouve

$$t = H(\tau - \tau_0),$$

$\tau_0$ étant un constante arbitraire.

Dans ce cas, en posant

$$(11)_a \qquad \begin{cases} f_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{H}}\left[\left(\dfrac{\partial F}{\partial p}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial q}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial F}{\partial r}\right)^2\right], \\ f_2 = \dfrac{1}{\sqrt{H}}\left[p\dfrac{\partial F}{\partial p} + q\dfrac{\partial F}{\partial q} + r\dfrac{\partial F}{\partial r} - F\right] \end{cases}$$

les équations $(9)_a$ deviennent

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}.$$

Dans la fonction $F$ on peut négliger le terme constant, alors il est aisé de remarquer que pour obtenir la fonction

$$p\frac{\partial F}{\partial p} + q\frac{\partial F}{\partial q} + r\frac{\partial F}{\partial r} - F$$

il suffit de négliger dans la fonction $F$ les termes de premier degré.

---

# CHAPITRE II.

## *L'étude analytique de la rotation d'un corps dans lequel existe un mouvement interne stationnaire.*

### Article I.

1. Dans le dernier article du chapitre précédent nous avons ramené les équations différentielles (3) au type suivant

$$(1)_b \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)}, \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)}, \\[2ex] \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)} \end{cases}$$

où $f_1, f_2$ sont des fonctions de $p, q, r$.

Nous allons par suite commencer par l'étude général des équations différentielles de ce type.

2. On peut trouver deux intégrales des équations $(1)_b$, c'est à dire

$$(2)_b \qquad f_1 = \text{const.} = h_1, \qquad f_2 = \text{const.} = h_2,$$

ce qu'on vérifie tout de suite par un calcul élémentaire.

Posons

$$(3)_b \qquad p = \frac{x_1}{x_4}, \qquad q = \frac{x_2}{x_4}, \qquad r = \frac{x_3}{x_4},$$

$$\varphi_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2\left[f_1\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_1\right],$$

$$\varphi_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4^2\left[f_2\left(\frac{x_1}{x_4}, \frac{x_2}{x_4}, \frac{x_3}{x_4}\right) - h_2\right].$$

Les fonctions $\varphi_1, \varphi_2$ auront un degré d'homogénéité égal à 2. On a maintenant

$$\frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} = \frac{1}{x_4^2} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)},$$

$$\frac{dp}{dt} = \frac{1}{x_4^2} \frac{x_4 dx_1 - x_1 dx_4}{dt};$$

par suite la première des équations $(1)_b$ s'écrira

$$(4)_b \qquad \frac{x_4 dx_1 - x_1 dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_2, x_3)}$$

et de même les deux autres pourront s'écrire

$$(4')_b \qquad \frac{x_4 dx_2 - x_2 dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_3, x_1)},$$

$$(4'')_b \qquad \frac{x_4 dx_3 - x_3 dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_1, x_2)}.$$

Enfin on pourra substituer aux deux intégrales $(2)_b$ les équations

$$(5)_b \qquad \varphi_1 = 0, \qquad \varphi_2 = 0.$$

Deux quelconques des équations $(4)_b$, $(4')_b$, $(4')_c$ auront la forme

$$\frac{x_4 dx_{(r)} - x_{(r)} dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+1)}, x_{(r+2)})},$$

$$\frac{x_4 dx_{(r+1)} - x_{(r+1)} dx_4}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{(r+2)}, x_{(r)})}$$

étant

$$0 < (r) < 4, \qquad (r) \equiv r \mod. 3.$$

On en tire

$$x_4 \frac{x_{(r+1)} dx_{(r)} - x_{(r)} dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+2)}} \left( x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r)}} \right)$$
$$- \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_{(r+2)}} \left( x_{(r+1)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r)} \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_{(r)}} \right).$$

Mais

$$x_{(r)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{(r)}} + x_{(r+1)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{(r+1)}} + x_{(r+2)}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_{(r+2)}} + x_4\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_4} = 2\varphi_i = 0, \qquad (i=1,2)$$

par suite l'équation précédente s'écrira

$$\frac{x_{(r+1)}dx_{(r)} - x_{(r)}dx_{(r+1)}}{dt} = \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_{(r+2)}}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_4} - \frac{\partial\varphi_1}{\partial x_4}\frac{\partial\varphi_2}{\partial x_{(r+2)}}.$$

On pourra donc conclure: *si* $i_1, i_2, i_3, i_4$ *est une permutation quelconque d'ordre pair des nombres* 1, 2, 3, 4 *on aura*

$$(6)_b \qquad \frac{x_{i_2}dx_{i_1} - x_{i_1}dx_{i_2}}{dt} = \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})}.$$

3. Appliquons aux variables $x_i$ une substitution linéaire

$$(7)_b \qquad x_i = \Sigma_s c_{i,s}\xi_s, \qquad \xi_s = \Sigma_i C_{i,s}x_i$$

et soit $C$ le déterminant des coefficients $c_{i,s}$. Nous supposons que $C$ ne s'annulle pas.

Nous aurons

$$\begin{vmatrix} dx_{i_1}, & dx_{i_2} \\ x_{i_1}, & x_{i_2} \end{vmatrix} = \sum \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} d\xi_{s_1}, & d\xi_{s_2} \\ \xi_{s_1}, & \xi_{s_2} \end{vmatrix},$$

$$\frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(x_{i_3}, x_{i_4})} = \sum \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})} \begin{vmatrix} C_{i_3,s_3}, & C_{i_4,s_3} \\ C_{i_3,s_4}, & C_{i_4,s_4} \end{vmatrix}.$$

Mais par un théorème sur les déterminants, on a [1]

$$\begin{vmatrix} C_{i_3,s_3}, & C_{i_4,s_3} \\ C_{i_3,s_4}, & C_{i_4,s_4} \end{vmatrix} = \frac{1}{C}\begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix}$$

par suite l'équation $(6)_b$ pourra s'écrire

$$\sum \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \frac{\xi_{s_2}d\xi_{s_1} - \xi_{s_1}d\xi_{s_2}}{dt} = \sum \begin{vmatrix} c_{i_1,s_1}, & c_{i_2,s_1} \\ c_{i_1,s_2}, & c_{i_2,s_2} \end{vmatrix} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}.$$

[1] Baltzer, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, III Auflage, page 50.

d'où l'on déduit

$$(8)_b \qquad \frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C} \frac{d(\varphi_1, \varphi_2)}{d(\xi_{s_3}, \xi_{s_4})}.$$

On tire de là qu'*une substitution linéaire ne change pas la forme des équations différentielles.*

## Article II.

1. Nous voulons maintenant appliquer les résultats de l'article précédent au cas où $f_1$ et $f_2$ sont des fonctions entières de 2e degré par rapport à $p, q, r$.

On aura alors

$$(9)_b \qquad \begin{cases} f_1 = \frac{1}{2}(a_{11}p^2 + a_{22}q^2 + a_{33}r^2) + a_{23}qr + a_{31}rp + a_{12}pq \\ \qquad\qquad + a_{14}p + a_{24}q + a_{34}r + a, \\ f_2 = \frac{1}{2}(b_{11}p^2 + b_{22}q^2 + b_{33}r^2) + b_{23}rq + b_{31}rp + b_{12}pq \\ \qquad\qquad + b_{14}p + b_{24}q + b_{34}r + b. \end{cases}$$

En posant

$$a - h_1 = \frac{1}{2} a_{44}, \qquad b - h_2 = \frac{1}{2} b_{44}$$

on trouvera

$$(9')_b \qquad \varphi_1 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s a_{i,s} x_i x_s, \qquad \varphi_2 = \frac{1}{2} \Sigma_i \Sigma_s b_{i,s} x_i x_s$$

et par la substitution $(7)_b$ on pourra reduire $\varphi_1$ et $\varphi_2$ aux formes suivantes

$$(10)_b \qquad \begin{cases} \varphi_1 = \frac{1}{2}(\lambda_1 \xi_1^2 + \lambda_2 \xi_2^2 + \lambda_3 \xi_3^2 + \lambda_4 \xi_4^2), \\ \varphi_2 = \frac{1}{2}(\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 + \xi_4^2) \end{cases}$$

Il suffit pour cela que l'on ait

$$(11)_b \qquad \begin{cases} \sum_i \sum_s b_{i,s} c_{i,h} c_{s,h} = 1, \\ \sum_i \sum_s b_{i,s} c_{i,h} c_{s,k} = 0, \qquad (h \gtrless k) \end{cases}$$

$$(11')_b \qquad \begin{cases} \sum_i \sum_s a_{i,s} c_{i,h} c_{s,h} = \lambda_h, \\ \sum_i \sum_s a_{i,s} c_{i,h} c_{s,k} = 0. \qquad (h \gtrless k) \end{cases}$$

Les quantités $\lambda_i$ seront les racines de l'équation de quatrième degré par rapport à $\lambda$

$$(12)_b \qquad \mathfrak{x}(\lambda) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda b_{11}, & a_{12} - \lambda b_{12}, & a_{13} - \lambda b_{13}, & a_{14} - \lambda b_{14} \\ a_{21} - \lambda b_{21}, & a_{22} - \lambda b_{22}, & a_{23} - \lambda b_{23}, & a_{24} - \lambda b_{24} \\ a_{31} - \lambda b_{31}, & a_{32} - \lambda b_{32}, & a_{33} - \lambda b_{33}, & a_{34} - \lambda b_{34} \\ a_{41} - \lambda b_{41}, & a_{42} - \lambda b_{42}, & a_{43} - \lambda b_{43}, & a_{44} - \lambda b_{44} \end{vmatrix} = 0.$$

Par suite, si $B$ est le discriminant de la forme $\varphi_2$, on aura

$$\mathfrak{x}(\lambda) = B(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2)(\lambda - \lambda_3)(\lambda - \lambda_4).$$

2. Supposons que les racines soient différentes entre elles.

Soient $\alpha_{r,s}$ les éléments adjoints aux éléments du déterminant $(12)_b$. Nous les désignerons par un suffixe $\alpha_{r,s}^{(i)}$ lorsqu'on remplacera $\lambda$ par $\lambda_i$.

On trouve alors les égalités

$$\frac{c_{1,s}}{\alpha_{1,r}^{(s)}} = \frac{c_{2,s}}{\alpha_{2,r}^{(s)}} = \frac{c_{3,s}}{\alpha_{3,r}^{(s)}} = \frac{c_{4,s}}{\alpha_{4,r}^{(s)}} = \sqrt{\frac{\sum_h \sum_k b_{h,k} c_{h,s} c_{k,s}}{\sum_h \sum_k b_{h,k} \alpha_{h,r}^{(s)} \alpha_{k,r}^{(s)}}} = \theta_s.$$

Mais par un théorème sur les déterminants on a [1]

$$\alpha_{h,r}^{(s)} \alpha_{k,r}^{(s)} = \alpha_{r,r}^{(s)} \alpha_{h,k}^{(s)}$$

par suite, à cause de la première des équations $(11)_b$

$$\theta_s = \frac{1}{\sqrt{\alpha_{r,r}^{(s)} \sum_h \sum_k b_{h,k} \alpha_{h,k}^{(s)}}}.$$

[1] BALTZER, *Theorie und Anwendungen der Determinanten*, III Auflage, page 54.

Dérivons l'équation $(12)_b$. Nous trouverons

$$\mathfrak{r}'(\lambda) = -\sum_h \sum_k b_{h,k} a_{h,k},$$

et., ayant égard à l'égalité $(13)_b$,

$$\sum_h \sum_k b_{hk} a_{hk}^{(s)} = -\mathfrak{r}'(\lambda_s) = B(\lambda_{s+1}-\lambda_s)(\lambda_{s+2}-\lambda_s)(\lambda_{s+3}-\lambda_s).$$

Par suite

$$(14)_b \qquad c_{i,s} = \frac{a_{i,r}^{(s)}}{\sqrt{a_{r,r}^{(s)} B(\lambda_{s+1}-\lambda_s)(\lambda_{s+2}-\lambda_s)(\lambda_{s+3}-\lambda_s)}}$$

$$= \sqrt{\frac{a_{i,i}^{(s)}}{B(\lambda_{s+1}-\lambda_s)(\lambda_{s+2}-\lambda_s)(\lambda_{s+3}-\lambda_s)}}.$$

Enfin si l'on fait usage de la règle pour calculer le produit des déterminants on trouve

$$BC^2 = 1$$

d'où

$$(15)_b \qquad C = \frac{1}{\sqrt{B}}.$$

3. Les équations $(8)_b$, à cause des formules $(10)_b$, deviendront

$$\frac{\xi_{s_2} d\xi_{s_1} - \xi_{s_1} d\xi_{s_2}}{dt} = \frac{1}{C}(\lambda_{s_3} - \lambda_{s_4})\xi_{s_3}\xi_{s_4}.$$

Posons

$$(16)_b \quad \xi_1 = \mu_1 \sigma_1(u), \qquad \xi_2 = \mu_2 \sigma_2(u), \qquad \xi_3 = \mu_3 \sigma_3(u), \qquad \xi_4 = \mu_4 \sigma(u)$$

$\sigma$, $\sigma_1$, $\sigma_2$, $\sigma_3$ étant les quatre fonctions de Weierstrass. Alors les équations précédentes deviendront

$$\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}(\sigma'_{(r)}\sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)}\sigma'_{(r+1)})\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)\mu_{(r+2)}\mu_4 \sigma_{(r+2)}\sigma,$$

$$\mu_4 \mu_{(r+2)}(\sigma'_{(r+2)}\sigma - \sigma_{(r+2)}\sigma')\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}(\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+1)})\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}\sigma_{(r)}\sigma_{(r+1)}.$$

Mais entre les fonctions $\sigma$ subsistent les relations différentielles [1]

$$\sigma'_{(r)}\sigma_{(r+1)} - \sigma_{(r)}\sigma'_{(r+1)} = (e_{(r+1)} - e_{(r)})\sigma_{(r+2)}\sigma,$$

$$\sigma'_{(r+1)}\sigma - \sigma_{(r+1)}\sigma' = -\sigma_{(r)}\sigma_{(r+1)},$$

par suite les équations précédentes pourront s'écrire

$$\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}(e_{(r+1)} - e_{(r)})\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)\mu_{(r+2)}\mu_4,$$

$$\mu_4\mu_{(r+2)}\frac{du}{dt} = \frac{1}{C}(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}$$

d'où l'on tire

$$(17)_b \qquad \frac{\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}}{\mu_4\mu_{(r+2)}} = \frac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)}{C(e_{(r+1)} - e_{(r)})}\frac{dt}{du} = \frac{C}{(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})\dfrac{dt}{du}};$$

par conséquent on aura

$$(18)_b \qquad e_{(r+1)} - e_{(r)} = \frac{1}{C^2}(\lambda_{(r+2)} - \lambda_{(r)})(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})\left(\frac{dt}{du}\right)^2$$

et enfin

$$(19)_b \qquad k^2 = \frac{e_2 - e_3}{e_1 - e_3} = \frac{\lambda_1 - \lambda_4}{\lambda_1 - \lambda_3} : \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_2 - \lambda_3}.$$

4. Des équations $(17)_b$ on déduit

$$\mu^2_{(r+2)}\frac{\mu_4}{\mu_{(r)}\mu_{(r+1)}\mu_{(r+2)}} = \frac{1}{C}(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})\frac{dt}{du},$$

$$\frac{\mu^2_{(r)}\mu^2_{(r+1)}}{\mu^2_4\mu^2_{(r+2)}} = \frac{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4}{(e_{(r+1)} - e_{(r)})(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})};$$

c'est pourquoi on aura

$$(20)_b \qquad \frac{\mu_{(r)}}{\sqrt{\lambda_{(r+2)} - \lambda_{(r+1)}}} = \frac{\mu_{(r+1)}}{\sqrt{\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+2)}}} = \frac{\mu_{(r+2)}}{\sqrt{\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)}}}$$

$$= \frac{\mu_4}{\sqrt{(e_{(r+1)} - e_{(r)})\dfrac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+2)})}{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4}}}.$$

---

[1] WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze zum Gebrauch der elliptischen Functionen*, page 28.

Or (voir $(7_b)$ et $(16)_b$)

$$x_i = \sum_s c_{i,s} \mu_s \sigma_s$$

donc, en calculant par les formules $(3)_b$, $(14)_b$ et $(20)_b$ les expressions de $p$, $q$, $r$ et en retranchant les facteurs communs aux numérateurs et aux dénominateurs on trouvera

$$(21)_b \qquad \left\{ \begin{aligned} p &= \frac{\sum_1^3 {}_r A_{1,r}\sigma_r + A_{1,4}\sigma}{\sum_1^3 {}_r A_{4,r}\sigma_r + A_{4,4}\sigma}, \\ q &= \frac{\sum_1^3 {}_r A_{2,r}\sigma_r + A_{2,4}\sigma}{\sum_2^3 {}_r A_{4,r}\sigma_r + A_{4,4}\sigma}. \\ r &= \frac{\sum_1^3 {}_r A_{3,r}\sigma_r + A_{3,4}\sigma}{\sum_1^3 {}_r A_{4,r}\sigma_r + A_{4,4}\sigma}, \end{aligned} \right.$$

où l'on a posé pour simplifier

$$(22)_b \qquad \left\{ \begin{aligned} A_{i,1} &= \sqrt{\frac{\alpha_{i,i}^{(1)}(\lambda_3 - \lambda_2)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}}, \\ A_{i,2} &= \sqrt{\frac{\alpha_{i,i}^{(2)}(\lambda_1 - \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}}, \\ A_{i,3} &= \sqrt{\frac{\alpha_{i,i}^{(3)}(\lambda_2 - \lambda_1)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)}}, \\ A_{i,4} &= \frac{1}{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4} \sqrt{\alpha_{i,i}^{(4)}(e_{(r+1)} - e_{(r)}) \frac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4 - \lambda_{(r+1)})(\lambda_4 - \lambda_{(r+2)})}}. \end{aligned} \right.$$

Pour trouver la relation qui subsiste entre la variable $t$ et l'argument $u$ des fonctions $\sigma$, il suffit de résoudre l'équation $(18)_b$ par rapport à $\frac{dt}{du}$. Si on intègre après, ayant égard à l'équation $(15)_b$ on trouve

$$(23)_b \qquad t = \sqrt{\frac{e_{(r+1)} - e_{(r)}}{B(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})}}\,(u - u_0),$$

$u_0$ étant une constante arbitraire.

et si l'on divise par $(A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)$

$$(25')_b \qquad \frac{Am_1^2}{A-\lambda}+\frac{Bm_2^2}{B-\lambda}+\frac{Cm_3^2}{C-\lambda}-2\lambda h+K_1=0.$$

A cause de l'égalité $(24)_b$ cette équation pourra s'écrire encore

$$(25'')_b \qquad \frac{m_1^2}{A-\lambda}+\frac{m_2^2}{B-\lambda}+\frac{m_3^2}{C-\lambda}+\frac{K^2}{\lambda}=2h.$$

Nous supposerons que les racines soient simples, que $m_1, m_2, m_3$ ne soient pas nuls et que les trois quantités $A, B, C$ soient différentes entre elles. Dans ces hypothèses aucune des racines ne sera égale à $A$ ni à $B$, ni à $C$.

3. Nous aurons, par des calculs sans difficulté,

$$\sqrt{a_{1,1}^{(s)}}=\frac{a_{1,4}^{(s)}}{\sqrt{a_{4,4}^{(s)}}}=m_1\sqrt{\frac{(\lambda_s-B)(\lambda_s-C)}{\lambda_s-A}},$$

$$\sqrt{a_{2,2}^{(s)}}=\frac{a_{2,4}^{(s)}}{\sqrt{a_{4,4}^{(s)}}}=m_2\sqrt{\frac{(\lambda_s-C)(\lambda_s-A)}{\lambda_s-B}},$$

$$\sqrt{a_{3,3}^{(s)}}=\frac{a_{3,4}^{(s)}}{\sqrt{a_{4,4}^{(s)}}}=m_3\sqrt{\frac{(\lambda_s-A)(\lambda_s-B)}{\lambda_s-C}},$$

$$\sqrt{a_{4,4}^{(s)}}=\sqrt{(\lambda_s-A)(\lambda_s-B)(\lambda_s-C)}.$$

Si l'on substitue ces valeurs de $\sqrt{a_{i,i}^{(s)}}$ dans les formules $(22)_b$ les équations $(21)_b$ deviennent

$$(26)_b \qquad \left\{\begin{aligned}
p&=m_1\frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1-A}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-A}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-A}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-A}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma},\\
q&=m_2\frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1-B}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-B}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-B}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-B}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma},\\
r&=m_3\frac{\dfrac{M_1}{\lambda_1-C}\sigma_1+\dfrac{M_2}{\lambda_2-C}\sigma_2+\dfrac{M_3}{\lambda_3-C}\sigma_3+\dfrac{M_4}{\lambda_4-C}\sigma}{M_1\sigma_1+M_2\sigma_2+M_3\sigma_3+M_4\sigma},
\end{aligned}\right.$$

ayant posé

$$
(27)_b \quad \begin{cases}
M_1 = \sqrt{\dfrac{\lambda_3 - \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)}}\sqrt{(\lambda_1 - A)(\lambda_1 - B)(\lambda_1 - C)}, \\
M_2 = \sqrt{\dfrac{\lambda_1 - \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_2)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_4 - \lambda_2)}}\sqrt{(\lambda_2 - A)(\lambda_2 - B)(\lambda_2 - C)}, \\
M_3 = \sqrt{\dfrac{\lambda_2 - \lambda_1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_2 - \lambda_3)(\lambda_4 - \lambda_3)}}\sqrt{(\lambda_3 - A)(\lambda_3 - B)(\lambda_3 - C)}, \\
M_4 = \sqrt{(e_{(r+1)} - e_{(r)})\dfrac{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_{(r+1)})(\lambda_{(r)} - \lambda_{(r+2)})}{(\lambda_4 - \lambda_{(r+1)})(\lambda_4 - \lambda_{(r)})}}\dfrac{\sqrt{(\lambda_4 - A)(\lambda_4 - B)(\lambda_4 - C)}}{\lambda_{(r+2)} - \lambda_4}.
\end{cases}
$$

Pour trouver l'équation du temps il suffit d'observer que le discriminant $B$ de la forme $\varphi_2$ dans notre cas se réduit à

$$B = -\frac{2h}{ABC}.$$

En substituant cette valeur dans l'équation $(23)_b$ on trouve

$$(27')_b \qquad t = \sqrt{\frac{ABC}{2h}\frac{e_{(r)} - e_{(r+1)}}{(\lambda_{(r+2)} - \lambda_4)(\lambda_{(r+1)} - \lambda_{(r)})}}(u - u_0).$$

On peut donc énoncer la proposition: *Si l'on a un corps, à l'intérieur duquel existent des mouvements stationnaires et qui n'est soumis à aucun couple de rotation, les trois composantes de la rotation par rapport au centre de gravité sont des fonctions elliptiques du temps.*

Le problème de la rotation est donc résolu par les formules de cet article, pour ce qui a rapport aux trois composantes de la rotation.

## Article IV.

1. Afin que la solution analytique du problème soit complète, il faut déterminer les neuf cosinus des angles que font les axes principaux avec le système d'axes fixes. On les a appelés dès le commencement (voir introduction) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

Nous avons déjà déterminé $p, q, r$; il suffit donc d'intégrer les équations de POISSON (voir introduction (2))

$$\frac{d\alpha_1}{dt} = \alpha_2 r - \alpha_3 q, \qquad \frac{d\beta_1}{dt} = \beta_2 r - \beta_3 q, \qquad \frac{d\gamma_1}{dt} = \gamma_2 r - \gamma_3 q,$$

$$\frac{d\alpha_2}{dt} = \alpha_3 p - \alpha_1 r, \qquad \frac{d\beta_2}{dt} = \beta_3 p - \beta_1 r, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = \gamma_3 p - \gamma_1 r,$$

$$\frac{d\alpha_3}{dt} = \alpha_1 q - \alpha_2 p, \qquad \frac{d\beta_3}{dt} = \beta_1 q - \beta_2 p, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = \gamma_1 q - \gamma_2 p.$$

2. Avant d'aborder cette question dans le cas particulier du problème que nous occupe, nous envisagerons le cas tout à fait général et nous donnerons dans cet article un *théorème sur la rotation des corps* qui simplifiera beaucoup tous les calculs que nous allons faire. Posons [1]

$$A_1 = \alpha_1 + i\beta_1, \qquad A_2 = \alpha_2 + i\beta_2, \qquad A_3 = \alpha_3 + i\beta_3$$

on aura les relations bien connues [2]

$$A_1\gamma_1 + A_2\gamma_2 + A_3\gamma_3 = 0,$$
$$iA_1 - A_2\gamma_3 + A_3\gamma_2 = 0$$

d'où l'on tire

$$(28)_b \qquad \begin{cases} A_2 = \dfrac{-\gamma_1\gamma_2 + i\gamma_3}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} A_1, \\[2ex] A_3 = \dfrac{-\gamma_1\gamma_3 - i\gamma_2}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2} A_1 \end{cases}$$

et par suite on a que $A_2$, $A_3$ peuvent s'exprimer rationnellement par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$.

Soit

$$B_1 = \alpha_1 - i\beta_1, \qquad B_2 = \alpha_2 - i\beta_2, \qquad B_3 = \alpha_3 - i\beta_3$$

nous pourrons écrire aussi

$$B_1 = \frac{1 - \gamma_1^2}{A_1}, \qquad B_2 = \frac{1 - \gamma_2^2}{A_2}, \qquad B_3 = \frac{1 - \gamma_3^2}{A_3}.$$

---

[1] Voir BRILL, *Sul problema della rotazione dei corpi*. Annali di Mat. T. III, S. II.

[2] Voir HERMITE, *Sur quelques applications des fonctions elliptiques*. XII, page 27.

Par conséquent $B_1$, $B_2$, $B_3$ pourront de même être représentés rationnellement par $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$, et de là on déduit que les six cosinus $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ seront des fonctions rationnelles des mêmes quantités.

Observons enfin que

$$\gamma_2 - i\gamma_3 = \frac{1 - \gamma_1^2}{\gamma_2 + i\gamma_3},$$

donc[1] *les neuf cosinus sont des fonctions rationnelles des trois quantités*

$$(29)_b \qquad 1 + \gamma_1, \quad \gamma_2 + i\gamma_3, \quad \alpha_1 + i\beta_1.$$

On déduit des équations de Poisson

$$\frac{dA_1}{dt} = A_2 r - A_3 q;$$

par suite, ayant égard aux équations $(28)_b$, nous obtiendrons

$$(30)_b \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{-\gamma_1(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + i(\gamma_3 r + \gamma_2 q)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2},$$

ce qui démontre que lorsqu'on connait $p, q, r$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, il suffit d'une seule quadrature pour obtenir tous les cosinus.

3. Les propriétés précédentes rappelées, nous allons démontrer le théorème suivant:

*Si $p, q, r$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ sont des fonctions uniformes du temps dont les points singuliers sont des pôles, et si dans tout point singulier l'ordre d'infini d'une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ n'est pas dépassé par l'ordre d'infini des fonctions $p, q, r$; alors les neuf cosinus seront des fonctions uniformes du temps et tous leurs points singuliers seront des pôles.*

En effet, si $p, q, r$; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ n'ont que des pôles pour points singuliers, on pourra écrire

$$p = \frac{P}{D}, \qquad q = \frac{Q}{D}, \qquad r = \frac{R}{D},$$

$$\gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}, \qquad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}, \qquad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D},$$

[1] Voir Halphen. *Traité des fonctions elliptiques.* T. II, page 11.

$P, Q, R; \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3; D$ étant des fonctions entières. Supposons qu'on ait retranché toutes les racines communes à ces fonctions, alors on pourra dire que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ n'auront pas des racines communes. Pour le voir il suffit d'observer que si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ avaient une racine qui ne fût pas une racine de $P, Q, R$, une au moins des fonctions $p, q, r$ deviendrait infinie d'ordre supérieur aux trois fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ pour $t$ égale à cette racine, ce qui est contraire aux hypothèses qu'on a faites.

Cela posé, on peut transformer l'équation $(30)_b$ en écrivant

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{(1-\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) - (\gamma_2 - i\gamma_3)(r - iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}$$
$$= \frac{-(1+\gamma_1)(\gamma_2 r - \gamma_3 q) + (\gamma_2 + i\gamma_3)(r + iq)}{\gamma_2^2 + \gamma_3^2}.$$

Mais

$$\gamma_2^2 + \gamma_3^2 = (1-\gamma_1)(1+\gamma_1) = (\gamma_2 - i\gamma_3)(\gamma_2 + i\gamma_3)$$

par suite

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1+\gamma_1} - \frac{r - iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = -\frac{\gamma_2 r - \gamma_3 q}{1-\gamma_1} + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3}.$$

Si on a égard à l'égalité

$$\gamma_2 r - \gamma_3 q = \frac{d\gamma_1}{dt},$$

l'équation précédente deviendra

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log(1+\gamma_1) - \frac{r-iq}{\gamma_2 + i\gamma_3} = \frac{d}{dt}\log(1-\gamma_1) + \frac{r+iq}{\gamma_2 - i\gamma_3},$$

c'est à dire

$$(31)_b \quad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma_1}{D}\right) - \frac{R - iQ}{\Gamma_2 + i\Gamma_3} = \frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma_1}{D}\right) + \frac{R+iQ}{\Gamma_2 - i\Gamma_3}.$$

Les pôles de la fonction $\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt}$ seront les valeurs de $t$ qui annullent une ou plusieurs des quantités

$$D + \Gamma_1\,,\; D - \Gamma_1\,,\; D\,,\; \Gamma_2 + i\Gamma_3\,,\; \Gamma_2 - i\Gamma_3.$$

Soit $t_0$ une de ces valeurs. Nous pouvons distinguer deux cas.

Si $t_0$ n'est pas en même temps une racine de $\Gamma'_2$ et $\Gamma'_3$, alors $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ et $\Gamma'_2 - i\Gamma'_3$ ne seront pas nuls à la fois. Il en suit que l'infini de $\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt}$ dépendra du terme $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{D+\Gamma'_1}{D}\right)$ ou du terme $\frac{d}{dt}\log\left(\frac{D-\Gamma'_1}{D}\right)$. Mais chacune de ces fonctions est la dérivée logarithmique du rapport de deux fonctions entières, donc dans ce cas $\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt}$ *sera infini de premier ordre et le résidu sera un nombre entier.*

Examinons maintenant le cas où $t_0$ est une racine de $\Gamma'_2$ et de $\Gamma'_3$. Alors $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ et $\Gamma'_2 - i\Gamma'_3$ seront nuls à la fois, et puisque

$$(D + \Gamma'_1)(D - \Gamma'_1) = (\Gamma'_2 + i\Gamma'_3)(\Gamma'_2 - i\Gamma'_3)$$

il faudra qu'un des facteurs du premier membre soit nul. Mais les deux facteurs ne sauraient pas être nuls simultanément, parce que $D$, $\Gamma'_1$, $\Gamma'_2$, $\Gamma'_3$ n'ont aucune racine commune.

On tire de là que

$$(32)_b \qquad \lim_{t=t_0}\frac{\Gamma'_1}{D} = \pm 1.$$

Calculons la dérivée de $\gamma_2 \pm i\gamma_3$. On aura

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \frac{d}{dt}\left(\frac{\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3}{D}\right) = \frac{1}{D^2}\left(D\frac{d(\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3)}{dt} - (\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3)\frac{dD}{dt}\right).$$

Mais des équations de Poisson on déduit

$$\frac{d}{dt}(\gamma_2 \pm i\gamma_3) = \mp ip(\gamma_2 \pm i\gamma_3) - \gamma_1(r \mp iq) = \frac{1}{D^2}\{\mp iP(\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3) - \Gamma'_1(R \mp iQ)\},$$

par suite

$$\frac{d(\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3)}{dt} = \frac{1}{D}(\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma'_1}{D}(R \mp iQ)$$

et enfin

$$(34)_b \qquad \frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3)} = \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma'_2 \pm i\Gamma'_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma'_1}{D}(R \mp iQ)}.$$

Soit $t_0$ une racine de $\Gamma_2 \pm i\Gamma_3$ d'ordre $n$, alors elle sera une racine d'ordre $n-1$ de $\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)$. L'équation $(33)_b$ nous montre qu'elle sera aussi une racine d'ordre $n-1$ de $R \mp iQ$, et par conséquent le rapport

$$(35)_b \qquad \frac{R \mp iQ}{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}$$

deviendra pour $t = t_0$ infini de premier ordre. Ayons égard maintenant aux deux expressions $(31)_b$ que nous avons trouvé pour $\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt}$. Le premier terme de l'une ou de l'autre sera fini pour $t = t_0$, donc $\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt}$ sera infini de premier ordre. Pour calculer le résidu il suffira de déterminer le résidu du rapport $(35)_b$ qui sera égal à

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{d}{dt}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)}.$$

On peut faire usage de la formule $(34)_b$, et on a alors

$$\rho = n \lim_{t=t_0} \frac{R \mp iQ}{\frac{1}{D}(\Gamma_2 \pm i\Gamma_3)\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right) - \frac{\Gamma_1}{D}(R \mp iQ)}$$

$$= n \lim_{t=t_0} \frac{-\frac{D}{\Gamma_1}}{1 - \frac{1}{\Gamma_1}\frac{\Gamma_2 \pm i\Gamma_3}{R \mp iQ}\left(\frac{dD}{dt} \mp iP\right)} = n \lim_{t=t_0}\left(-\frac{D}{\Gamma_1}\right),$$

ce qui montre (voir $(32)_b$) que le résidu est un nombre entier.

Nous pouvons donc conclure que *dans tous les cas les singularités de la fonction*

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log A_1$$

*sont des pôles de premier ordre, les résidus étant des nombres entiers.* Par conséquent $A_1$ sera une fonction uniforme ayant pour singularités des

pôles, et les neuf cosinus qui sont des fonctions rationnelles de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, A_1$ seront aussi des fonctions de la même nature.

C. Q. F. D.

4. On peut énoncer le théorème du paragraphe précédent d'une autre manière.

*Si on a*

$$(36)_b \quad p = \frac{P}{D}, \quad q = \frac{Q}{D}, \quad r = \frac{R}{D}; \quad \gamma_1 = \frac{\Gamma_1}{D}, \quad \gamma_2 = \frac{\Gamma_2}{D}, \quad \gamma_3 = \frac{\Gamma_3}{D}$$

$P, Q, R$ ; $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ; $D$ *étant des fonctions uniformes et entières du temps; et si* $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ *n'ont aucune racine commune; les neuf cosinus seront des fonctions uniformes et leurs singularités seront des pôles.*

En effet nous avons déjà vu que si dans chaque point singulier l'ordre d'infini d'une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ n'est pas dépassé par les ordres d'infini de $p, q, r$ *il faut* que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ n'aient aucune racine commune. Démontrons maintenant la proposition reciproque. Soit $n$ l'ordre de multiplicité d'une racine de $D$ dans un point singulier. Il y aura une des fonctions $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui deviendra infinie d'ordre $n$ et aucune des fonctions $p, q, r$ deviendra infinie d'ordre supérieur.

## Article V.

1. Pour vérifier si les conditions nécessaires et suffisantes pour l'application du théorème fondamental de l'article précédent sont satisfaites dans le problème de rotation que nous étudions, il faut calculer $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, ayant déjà calculé dans l'article III les quantité $p, q, r$.

Faisons coïncider l'axe $z$ avec l'axe du couple de quantité de mouvement. On aura alors

$$\gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K}, \qquad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K}, \qquad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}$$

et en substituant à $p, q, r$ les valeurs qu'on a trouvées (voir article III $(26)_b$)

$$(37)_b \quad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{m_1}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}, \\ \gamma_2 = \dfrac{m_2}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}, \\ \gamma_3 = \dfrac{m_3}{K} \dfrac{\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma}. \end{cases}$$

Si donc on fait usage des notations de l'article précédent on trouve (voir article III $(26)_b$)

$$(38)_b \quad \begin{cases} P = m_1\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right), \\ Q = m_2\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right), \\ R = m_3\left(\dfrac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right), \end{cases}$$

$$(39)_b \quad \begin{cases} \Gamma_1 = \dfrac{m_1}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - A}\sigma\right), \\ \Gamma_2 = \dfrac{m_2}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - B}\sigma\right), \\ \Gamma_3 = \dfrac{m_3}{K}\left(\dfrac{\lambda_1 M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \dfrac{\lambda_2 M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \dfrac{\lambda_3 M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \dfrac{\lambda_4 M_4}{\lambda_4 - C}\sigma\right), \\ D = M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma. \end{cases}$$

2. Démontrons maintenant que les quatres fonctions $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ n'ont aucune racine commune. Cela suffira pour prouver que tous les neuf cosinus sont des fonctions uniformes ayant pour singularités des pôles.

Posons

$$M_1\sigma_1 = y_1, \qquad M_2\sigma_2 = y_2, \qquad M_3\sigma_3 = y_3, \qquad M_4\sigma = y_4$$

et ayons égard à l'hypothèse qu'on a faite que $m_1, m_2, m_3$ ne sont pas nuls. Alors les équations

$$(40)_b \qquad D = \Gamma_1 = \Gamma_2 = \Gamma_3 = 0$$

pourront s'écrire

$$(41)_b \quad \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - A} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - A} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} y_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} y_4 = 0, \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C} y_1 + \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C} y_2 + \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C} y_3 + \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} y_4 = 0. \end{cases}$$

Le déterminant des coefficients sera

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1, & 1, & 1, & 1 \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda^1 - A}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - A}, & \dfrac{\lambda}{\lambda_3 - A}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - A} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - B}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - B}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - B}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - B} \\ \dfrac{\lambda_1}{\lambda_1 - C}, & \dfrac{\lambda_2}{\lambda_2 - C}, & \dfrac{\lambda_3}{\lambda_3 - C}, & \dfrac{\lambda_4}{\lambda_4 - C} \end{vmatrix} = 0$$

et en le développant on trouvera

$$\Delta = \frac{ABC(B-A)(C-A)(C-B)(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}{(\lambda_1-A)(\lambda_2-A)(\lambda_3-A)(\lambda_4-A)(\lambda_1-B)(\lambda_2-B)(\lambda_3-B)(\lambda_4-B)(\lambda_1-C)(\lambda_2-C)(\lambda_3-C)(\lambda_4-C)}.$$

Le premier membre de l'équation $(25)_b$ peut s'écrire

$$\frac{\mathfrak{x}(\lambda)}{ABC} = 2h(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)(\lambda-\lambda_4) = (A-\lambda)(B-\lambda)(C-\lambda)(K_1 - 2h\lambda)$$
$$+ Am_1^2(B-\lambda)C-\lambda) + Bm_2^2(C-\lambda)(A-\lambda) + Cm_3^2(A-\lambda)(B-\lambda).$$

En faisant successivement $\lambda = A, B, C$ on aura

$$(A-\lambda_1)(A-\lambda_2)(A-\lambda_3)(A-\lambda_4) = \frac{Am_1^2(B-A)(C-A)}{2h},$$

$$(B-\lambda_1)(B-\lambda_2)(B-\lambda_3)(B-\lambda_4) = \frac{Bm_2^2(C-B)(A-B)}{2h},$$

$$(C-\lambda_1)(C-\lambda_2)(C-\lambda_3)(C-\lambda_4) = \frac{Cm_3^2(A-C)(B-C)}{2h}.$$

Par suite le dénominateur de $\Delta$ sera égal à

$$-\frac{ABCm_1^2 m_2^2 m_3^2 (B-A)^2 (C-A)^2 (C-B)^2}{8h^8}$$

et par conséquent

$$\Delta = 8h^3 \frac{(\lambda_1-\lambda_2)(\lambda_1-\lambda_3)(\lambda_1-\lambda_4)(\lambda_2-\lambda_3)(\lambda_2-\lambda_4)(\lambda_3-\lambda_4)}{m_1^2 m_2^2 m_3^2 (B-A)(C-B)(A-C)}.$$

Mais on a supposé que les racines $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ soient différentes entre elles. Il en suit que $\Delta$ n'est pas nul, d'où l'on tire la conséquence que les équations $(41)_b$, c'est à dire les équations $(40)_b$, sont incompatibles. Cela signifie que les quatre fonctions $D$, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$, $\Gamma_3$ n'ont aucune racine commune. Il ressort donc du théorème de l'article précédent que les neuf cosinus seront des fonctions uniformes et leur singularités seront des pôles. Ils seront des rapports de fonctions uniformes et entières, et nous en calculerons les expressions dans l'article suivant.

## Article VI.

1. Pour obtenir les expressions des neuf cosinus il suffit de calculer

$$1+\gamma_1\,,\ \gamma_2+i\gamma_3\,,\ \alpha_1+i\beta_1$$

puisque les cosinus sont des fonctions rationnelles connues de ces quantités. (Voir article IV, § 2.)

Si on prend l'expression de $D$ trouvée dans l'article précédent on a

$$\frac{D}{\sigma} = M_1\frac{\sigma_1}{\sigma} + M_2\frac{\sigma_2}{\sigma} + M_3\frac{\sigma_3}{\sigma} + M_4 = \chi(u).$$

Donc $\chi(u)$ est une fonction doublement périodique dont les périodes sont $4\omega$ et $4\omega'$. [1]

Posons $u = 2v$, il viendra

$$\chi(2v) = \varphi(v)$$

et $\varphi$ aura pour périodes $2\omega$ et $2\omega'$. Elle deviendra infinie à l'intérieur

[1] Weierstrass, *Formeln und Lehrsätze*, page 28.

du parallelogramme des périodes dans les points $0, \omega, \omega', \omega''$, par suite elle sera une fonction elliptique de quatrième degré et l'on aura [1]

$$\varphi(v) = C_1 \frac{\sigma\left(v - \frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_4}{2}\right)}{\sigma v \sigma(v - \omega)\sigma(v - \omega')\sigma(v - \omega'')},$$

$C_1$ étant une constante et

$$u_1 + u_2 + u_3 + u_4 = 4\omega''.$$

Par conséquent

$$D = C_1 \sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right) G$$

et l'on a

$$G = \frac{\sigma u}{\sigma \frac{u}{2} \sigma\left(\frac{u}{2} - \omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2} - \omega''\right)}.$$

De même on peut écrire

$$D + \Gamma_1 = C_2 \sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right) G,$$

$$\Gamma_2 + i\Gamma_3 = C_3 \sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_4}{2}\right) G,$$

$C_2$, $C_3$ étant des quantités constantes, et

$$v_1 + v_2 + v_3 + v_4 = w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = 4\omega''.$$

On déduit de là les expressions suivantes pour $1 + \gamma_1$ et $\gamma_2 + i\gamma_3$

$$(42)_b \quad \begin{cases} 1 + \gamma_1 = L_1 \dfrac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)}, \\[2ex] \gamma_2 + i\gamma_3 = L_2 \dfrac{\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)}, \end{cases}$$

[1] Ibid. page 15.

et il faudra supposer [1]

$$\frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} = \frac{w_1 + w_2 + w_3 + w_4}{2} \equiv 0,$$

$L_1$ et $L_2$ étant des constantes.

2. Posons

$$(43)_b \quad \begin{cases} D' = \sigma\left(\frac{u-u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-u_4}{2}\right) \\ \quad = \sigma\left(v-\frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{u_4}{2}\right), \\ D' + \Gamma' = L_1\sigma\left(\frac{u-v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-v_4}{2}\right) \\ \quad = L_1\sigma\left(v-\frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{v_4}{2}\right), \\ \Gamma'_2 + i\Gamma'_3 = L_2\sigma\left(\frac{u-w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u-w_4}{2}\right) \\ \quad = L_2\sigma\left(v-\frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_2}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_3}{2}\right)\sigma\left(v-\frac{w_4}{2}\right). \end{cases}$$

Les trois fonctions $D'$, $D' + \Gamma'$, $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ seront des fonctions entières et on pourra les substituer à $D$, $D + \Gamma_1$, $\Gamma_2 + i\Gamma_3$ dans les formules de l'article précédent. En faisant cette substitution dans la formule $(31)_b$ on aura

$$(31')_b \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \frac{d}{dt}\log\frac{D' + \Gamma'}{D'} - \frac{R' - iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} = \psi(t)$$

où l'on a posé

$$R - iQ = (R' - iQ')\frac{\sigma u}{\sigma\frac{u}{2}\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega'\right)\sigma\left(\frac{u}{2}-\omega''\right)}.$$

---

[1] Nous écrirons $a \equiv b$ lorsque les nombres $a$ et $b$ seront tels que

$$a - b = 2m\omega + 2n\omega',$$

$m$ et $n$ étant des nombres entiers.

Dans l'article III nous avons établi la relation qui subsiste entre les variables $t$ et $u$. Elle peut s'écrire (voir $(27')_b$)

$$t = n(u - u_0) = 2n\left(v - \frac{u_0}{2}\right)$$

où $n$ et $u_0$ sont des quantités constantes. Par suite

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv} = \frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right) - \frac{1}{2n}\frac{R' - iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} = \psi_1(v)$$

D'après des propriétés bien connues on pourra dire que les résidus de la fonction $\psi_1(v)$ seront égaux à ceux de la fonction $\psi(t)$.

3. Cela posé supposons qu'aucune des valeurs $u_i$ ne soit congruente à une valeur $v_i$. On pourra en déduire qu'aucune des $w_i$ ne sera congruente à une valeur $u_i$. En effet chaque racine de $\Gamma'_2 + i\Gamma'_3$ est une racine de $D' + \Gamma'$ ou de $D' - \Gamma'$, mais elle ne peut pas être une racine de $D'$, parce que dans ce cas $D'$ et $D' + \Gamma'$ auraient une racine commune, ce qui est contraire aux hypothèses qu'on a faites. Donc les valeurs $w_i$ ne sont pas des racines ni de $D'$ ni de $\Gamma'$, et par suite on pourra énoncer les propriétés suivantes:

1° pour les valeurs $v \equiv \frac{v_i}{2}$ la fonction

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right)$$

est infinie de premier ordre, son résidu étant $+1$.

2° pour les valeurs $v \equiv \frac{u_i}{2}$ la fonction

$$\frac{d}{dv}\log\left(\frac{D' + \Gamma'}{D'}\right)$$

est infinie de premier ordre, le résidu étant $-1$.

3° pour les valeurs $v \equiv \frac{w_i}{2}$ la fonction

$$-\frac{1}{2n}\frac{R' - iQ'}{\Gamma'_2 + i\Gamma'_3} \tag{44$_b$}$$

est infinie de premier ordre, le résidu étant $\pm 1$.

Prenons les points $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}, \frac{w_3}{2}, \frac{w_4}{2}$ à l'intérieur du parallélogramme des périodes. La somme des résidus de la fonction dans les points d'infini qui sont à l'intérieur du parallélogramme des périodes devant être nulle, il faudra que le résidu de la fonction $(44)_b$ soit égal à $+1$ en deux des quatre points $\frac{w_i}{2}$ et soit égal à $-1$ dans les autres.

Rappelons maintenant (voir article I, § 3) que la fonction $(44)_b$ doit avoir le résidu égal $+1$ où s'annule $D' - \Gamma''$, et doit avoir le résidu égal $-1$ où $D' + \Gamma''$ s'annule. Il faudra donc que pour deux des valeurs de la variable $v$, par ex. $\frac{w_3}{2}, \frac{w_4}{2}$, soit nulle la somme $D' + \Gamma''$ et pour les autres $\frac{w_1}{2}, \frac{w_2}{2}$ soit nulle la différence $D' - \Gamma''$. Si nous choisissons $v_3$ et $v_4$ de manière que l'on ait $v_3 = w_3$, $v_4 = w_4$, on pourra dire:

1° pour

$$v \equiv \frac{v_1}{2}, \qquad v \equiv \frac{v_2}{2}, \qquad v \equiv \frac{w_1}{2}, \qquad v \equiv \frac{w_2}{2}$$

la fonction

$$(45)_b \qquad \frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dv}$$

sera infinie de premier ordre et le résidu sera $+1$.

2° pour

$$v \equiv \frac{u_i}{2}$$

la même fonction sera infinie du premier ordre et le résidu sera $-1$.

3° la fonction $(45)_b$ n'aura d'autres infinis que les précédents.

Par suite il viendra [1]

$$\frac{1}{A_1}\frac{dA_1}{dt} = \zeta\left(v - \frac{v_1}{2}\right) + \zeta\left(v - \frac{v_2}{2}\right) + \zeta\left(v - \frac{w_1}{2}\right) + \zeta\left(v - \frac{w_2}{2}\right)$$
$$- \zeta\left(v - \frac{u_1}{2}\right) - \zeta\left(v - \frac{u_2}{2}\right) - \zeta\left(v - \frac{u_3}{2}\right) - \zeta\left(v - \frac{u_4}{2}\right) + 2m,$$

$m$ étant une constante.

---

[1] Voir WEIERSTRASS, *Formeln und Lehrsätze*, page 20.

Si on intègre et qu'on désigne par $L_3$ une nouvelle constante, on trouvera

$$A_1 = L_3 \frac{\sigma\left(v - \frac{v_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{v_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{w_2}{2}\right)}{\sigma\left(v - \frac{u_1}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_2}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_3}{2}\right)\sigma\left(v - \frac{u_4}{2}\right)} e^{2mv}$$

$$= L_3 \frac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)} e^{mu}.$$

Rappelons les formules $(42)_b$ et ayons égard aux égalités $w_3 = v_3$, $w_4 = v_4$. Nous pourrons écrire

$$(46)_b \quad \begin{cases} 1 + \gamma_1 = L_1 \dfrac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)}, \\[2ex] \gamma_2 + i\gamma_3 = L_2 \dfrac{\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_4}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)}, \\[2ex] \alpha_1 + i\beta_1 = L_3 \dfrac{\sigma\left(\frac{u - v_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - v_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - w_2}{2}\right)}{\sigma\left(\frac{u - u_1}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_2}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_3}{2}\right)\sigma\left(\frac{u - u_4}{2}\right)} e^{mu}, \end{cases}$$

où il faut supposer

$$(47)_b \quad w_1 + w_2 = v_1 + v_2, \qquad \frac{u_1 + u_2 + u_3 + u_4}{2} = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{2} \equiv 0.$$

On a ainsi l'expression générale des trois fonctions dont les cosinus dépendent rationnellement d'une manière connue. Il est aisé de voir que les formules gardent la même forme si l'on suppose que quelques-unes des valeurs $u_i$ soient congruentes aux valeurs $v_i$. Il ne reste à trouver que les relations entre les constantes $u_i$, $v_i$, $w_i$, $L_1$, $L_2$, $L_3$ et $m$ et les constantes mécaniques du problème.

### *Note au chapitre II.*

1. La résolution analytique de la question est composée de deux parties. Dans la première on détermine les composantes de la rotation; dans l'autre on calcule les cosinus des angles que les axes d'inertie font avec les axes fixes.

C'est la même décomposition de la question qu'ont fait JACOBI et la plupart de ceux qui ont traité de la rotation des corps. Il va sans dire que la première question est beaucoup plus simple et plus facile que l'autre.

2. Par rapport à la première question on peut remarquer que pour reconnaître *à priori* que les composantes de la rotation s'expriment par des fonctions elliptiques du temps, il suffit d'avoir égard à la polodie qui est l'intersection de deux quadriques. Les coordonnées de cette courbe sont des fonctions elliptiques d'un paramètre, et puisqu'elles sont proportionnelles aux trois composantes de la rotation, celles-ci pourront de même s'exprimer comme des fonctions elliptiques de ce paramètre $u$. Or on peut démontrer que $u$ est une fonction linéaire du temps. En effet si l'on calcule $\frac{dt}{du}$ on voit tout de suite, à cause des équations (3), que ce rapport est une fonction doublement périodique. Il est facile de démontrer que, si l'équation $(25')_b$ n'a pas de racines multiples, $\frac{dt}{du}$ n'a pas d'infinis, ce qui prouve que ce rapport est constant.

2. Relativement à la seconde question on peut dire qu'elle a été résolue aisément dans le chapitre précédent en vertu du théorème de l'article IV. La difficulté très-grave de la détermination des cosinus a été surmontée presque sans calculs. Si on aurait voulu suivre la voie directe il aurait fallu calculer et discuter l'expression $(30')_b$ qui peut se mettre sous forme de rapport de deux polynomes rationnels et entiers de $3^{ème}$ degré par rapport aux fonctions $\sigma$. Mais en employant le théorème

qu'on vient de citer, il a été suffisant de s'assurer que les numérateurs et les dénominateurs des expressions de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ ne s'annulent pas ensemble pour reconnaître que tous les cosinus sont des fonctions uniformes du temps et pour pouvoir après les calculer.

Si on emploie la même méthode dans le cas des problèmes d'EULER et de LAGRANGE on est conduit tout aisément aux mêmes conclusions.

3. Dans un de ces admirables fragments sur la rotation d'un corps que M. LÖTTNER a tirés des manuscrits de JACOBI, on trouve l'explication du succès de la méthode d'intégration de JACOBI dans le cas du problème d'EULER. La voici: l'angle $\psi$ d'EULER formé par l'intersection des plans $\xi\eta$ et $xy$ avec l'axe $x$ s'exprime par une somme d'intégrales elliptiques de troisième espèce auxquelles *est attaché le diviseur 2i*. Puisque la même circonstance favorable se présente dans le problème de LAGRANGE, JACOBI a pu reconnaître *a priori* que son procédé pouvait s'étendre à ce cas.

Allons voir quelle relation subsiste entre l'existence du diviseur $2i$ de JACOBI et le théorème de l'article IV.

La dérivée de l'angle $\psi$ d'EULER est donnée par la formule

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{p\gamma_1 + q\gamma_2}{1 - \gamma_3^2} = \frac{(p + iq)(\gamma_1 - i\gamma_2) + i(\gamma_2 p - \gamma_1 q)}{1 - \gamma_3^2}$$

$$= \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{1 - \gamma_3}{1 + \gamma_3} - 2\,\frac{q - ip}{\gamma_1 + i\gamma_2}\right] = \frac{1}{2i}\left[\frac{d}{dt}\log\frac{D - \Gamma_3}{D + \Gamma_3} - 2\,\frac{Q - iP}{\Gamma_1 + i\Gamma_2}\right].$$

Si $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, D$ ne s'annulent pas ensemble, par un raisonnement semblable à celui qu'on a fait dans l'article IV on a que $\frac{d\psi}{dt}$ est une fonction uniforme dont les singularités sont des pôles du premier ordre et ses résidus sont égaux à $\frac{n}{2i}$, $n$ étant un nombre entier. On tire de là que l'existence du diviseur de JACOBI dépend du théorème de l'article IV, c'est à dire qu'il existe parce que $D, \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ ne s'annulent pas ensemble.

On a donc que le théorème de l'article IV peut remplacer la recherche du diviseur de JACOBI par l'étude directe de $p, q, r; \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$.

4. M. JAHNSKE tout récemment dans quelques Notes exprime l'intention de revenir sur la question que j'ai traitée.

C'est par ces notes que j'ai appris, après la rédaction du présent mémoire, que M. WANGERIN avait traité dans un savant travail un cas particulier en dehors de la question de mécanique céleste. Le cas de M. WANGERIN n'est pas celui des mouvements internes stationnaires qui a été traité dans les chapitres précédents, mais c'est un cas particulier de mouvement adiabatique. Seulement par un théorème que j'ai donné dans le 4ème chapitre les mouvements stationnaires et les mouvements adiabatiques en général restent liés ensembles, c'est à dire il y a un moyen de passer des uns aux autres et même à ceux qui tiennent en même temps des deux types de mouvement.

M. WANGERIN s'est limité à la détermination des composantes de la rotation, parce qu'il ne prend pas en considération les cosinus des angles; c'est pourquoi il s'occupe seulement de la première partie du problème dont on a parlé au premier paragraphe.

---

## CHAPITRE III.

### *Les axes permanents de rotation et leur stabilité.*

#### Article I.

1. Déjà dans l'article III du I chapitre nous avons envisagé les axes permanents de rotation et démontré un théorème à leur égard. Nous voulons maintenant étudier la question des axes permanents, de leur distribution, de leur stabilité, et tirer les conséquences qui découlent de ces recherches.

Ecrivons les équations différentielles de la rotation comme nous avons fait dans le 1[er] chapitre, article V, § 2 (voir aussi le chapitre II). En posant

$$(1)_c \qquad \begin{cases} \mathfrak{f}_1 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}[(Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2], \\ \mathfrak{f}_2 = \dfrac{1}{2\sqrt{ABC}}[Ap^2 + Bq^2 + Cr^2] \end{cases}$$

on aura

$$(2)_c \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} = \dfrac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(q, r)}, \\ \dfrac{dq}{dt} = \dfrac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(r, p)}, \\ \dfrac{dr}{dt} = \dfrac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(p, q)}. \end{cases}$$

2. Supposons maintenant que $p, q, r$ soient les coordonnées d'un point en mouvement $P'$.[1]

[1] On pourrait appeler le point $P'$ *l'indice de la rotation* pour le distinguer du *pôle de la rotation* (voir le 1[er] chapitre, article I, § 1) qu'on a désigné par $P$. Entre les coordonnées $p, q, r$ de $P'$ et les coordonnées $\xi, \eta, \zeta$ de $P$ subsistent les relations

$$\frac{\xi}{p} = \frac{\eta}{q} = \frac{\zeta}{r} = \frac{1}{\sqrt{2h_2}\sqrt[4]{ABC}}.$$

Puisque les équations précédentes admettent les intégrales

$$(3)_c \qquad \mathfrak{f}_1 = \text{const.} = h_1, \qquad \mathfrak{f}_2 = \text{const.} = h_2,$$

et qu'on peut envisager ces équations comme les équations de deux surfaces du 2[d] degré, on aura que les intersections de ces surfaces seront toutes les trajectoires possibles du point $P'$. Ces trajectoires seront donc des lignes du 4[e] ordre (*quartiques*). Pour trouver les rotations permanentes il suffira de trouver les positions dans lesquelles $P'$ est en repos. Pour simplifier on pourra les appeler *les positions d'équilibre du point* $P'$.

Ces positions d'équilibre seront telles que

$$(4)_c \qquad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(q, r)} = 0, \qquad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(r, p)} = 0, \qquad \frac{d(\mathfrak{f}_1, \mathfrak{f}_2)}{d(p, q)} = 0$$

c'est à dire

$$(4')_c \qquad \frac{\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial p}}{\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial p}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial q}}{\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial q}} = \frac{\frac{\partial \mathfrak{f}_1}{\partial r}}{\frac{\partial \mathfrak{f}_2}{\partial r}}.$$

Les équations précédentes représentent les conditions pour que dans le point $p, q, r$ les deux surfaces du 2[e] degré soient tangentes de sorte que ce point soit un point double d'une des quartiques.

C'est pourquoi on a le théorème. (Voir chapitre I, article III, § 1.)

*Les points doubles des quartiques* $\mathfrak{f}_1 = h_1$, $\mathfrak{f}_2 = h_2$ *sont les positions d'équilibre du point* $P'$, *et le lieu de ces points est la courbe ayant pour équations les équations* $(4')_c$.

Les équations $(4)_c$ peuvent s'écrire (voir $(6)_a$)

$$(4'')_c \qquad \begin{cases} (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = 0, \\ (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = 0, \\ (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = 0, \end{cases}$$

c'est pourquoi *la condition nécessaire et suffisante pour que le lieu des positions d'équilibre de* $P'$ *se décompose en courbes d'ordre inférieur sera*

$$(5)_c \qquad (B - C)(C - A)(A - B)m_1 m_2 m_3 = 0.$$

3. Une nouvelle manière d'écrire les équations $(4)_c$ est la suivante (voir $(6')_a$)

$$(6)_c \qquad A + \frac{m_1}{p} = B + \frac{m_2}{q} = C + \frac{m_3}{r}.$$

Si l'on appelle $\lambda$ la valeur commune aux trois membres, on trouvera

$$(6')_c \qquad p = \frac{m_1}{\lambda - A}, \qquad q = \frac{m_2}{\lambda - B}, \qquad r = \frac{m_3}{\lambda - C}.$$

Envisageons maintenant le cas général en supposant que $m_1, m_2, m_3$ ne s'annullent pas et qu'on ait $A > B > C$.

Tous les points de la courbe, lieu des positions d'équilibre de $P'$, s'obtiendront des équations précédentes en donnant à $\lambda$ toutes les valeurs comprises entre $-\infty$ et $+\infty$.

La courbe aura trois asymptotes qui seront les droites $L_1, L_2, L_3$ parallèles aux axes coordonnées $\xi, \eta, \zeta$ ayant respectivement pour équations

$$q = \frac{m_2}{A - B}, \qquad r = \frac{m_3}{A - C},$$

$$r = \frac{m_3}{B - C}, \qquad p = \frac{m_1}{B - A},$$

$$p = \frac{m_1}{C - A}, \qquad q = \frac{m_2}{C - B}.$$

Elle sera formée de trois branches $g_1, g_2, g_3$. La première branche partira du point $-\infty$ de $L_1$ et aboutira au point $+\infty$ de $L_2$. Elle correspondra aux valeurs de $\lambda$ comprises entre $A$ et $B$. La seconde branche partira du point $-\infty$ de $L_2$ et aboutira au point $+\infty$ de $L_3$. Elle correspondra aux valeurs de $\lambda$ comprises entre $B$ et $C$. Enfin la dernière branche ira du point $-\infty$ de $L_3$ au point $+\infty$ de $L_1$ en passant par l'origine et correspondra à toutes les valeurs de $\lambda$ plus grandes que $A$ et à toutes celles plus petites que $C$.

*La courbe lieu des positions d'équilibre de $P'$ est donc une hyperbole cubique.*[1]

[1] A l'article IV de ce chapitre on a exposé de quelle manière cette courbe peut se décomposer en courbes d'ordre inférieur.

4. Lorsque les équations $(4')_c$ sont équivalentes à une seule équation, ou qu'elles se réduisent à trois identités, alors le lieu des positions d'équilibre de $P'$ n'est plus une courbe. Afin que ces cas se présentent il faut qu'un ou plusieurs des systèmes suivants de conditions soit vérifié

$$(7)_c \qquad \begin{cases} C - B = m_3 = m_2 = 0, \\ A - C = m_1 = m_3 = 0, \\ B - A = m_2 = m_1 = 0. \end{cases}$$

Si un seul est vérifié, alors la dégénération du lieu conduira à une droite et à un plan. Si deux sont vérifiés, et par suite les trois sont vérifiés, c'est à dire si l'on a

$$A = B = C; \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 0$$

alors chaque point de l'espace sera une position d'équilibre du point $P'$. Par l'étude que nous venons de faire on a résolu complètement la question des axes permanents de rotation. Nous consacrerons les articles suivants à la classification des axes permanents selon leur stabilité.

## Article II.

1. Commençons par donner la définition de *stabilité de l'équilibre du point $P'$*. Elle correspondra parfaitement à celle de *rotation stable* du système.

On dira que la position $P'_0$ de $P'$ est stable, si, $\sigma$ étant un nombre aussi petit que l'on veut, on peut trouver un nombre $\varepsilon$ tel qu'en plaçant $P'$ à une distance de $P'_0$ plus petite que $\varepsilon$, et en le faisant mouvoir d'après la loi représentée par les équations $(2)_c$, il ne s'éloignera jamais de $P'_0$ au delà de $\sigma$.

Cela posé, en suivant un raisonnement semblable à celui bien connu employé par Dirichlet, on peut démontrer le théorème suivant:

*Tous les points isolés des quartiques* $(3)_c$ *seront des positions d'équilibre stable du point $P'$.*

Soit $P'_0$ un point isolé. Désignons par $f_1^0$, $f_2^0$ les valeurs des fonctions $f_1$, $f_2$ au point $P'_0$, et formons l'expression

$$I = (f_1 - f_1^0)^2 + (f_2 - f_2^0)^2.$$

$I$ sera une fonction continue des coordonnées $p$, $q$, $r$.

Je dis qu'on peut trouver un nombre $\alpha$ tel que la limite inférieure des valeurs de $I$ sur chaque sphère ayant $P'_0$ pour centre et dont le rayon est plus petit que $\alpha$, est un nombre positif.

En effet s'il n'était possible de satisfaire la condition précédente quelque petit qu'on prenait $\alpha$, les deux surfaces

$$f_1 = f_1^0, \qquad f_2 = f_2^0$$

auraient des points d'intersection réels aussi voisins que l'on voudrait à $P'_0$, et par suite ce point ne serait pas un point isolé de la quartique à laquelle il appartient.

Désignons par $S$ la sphère ayant pour centre $P'_0$ et pour rayon $\alpha$. A l'intérieur de cette surface construisons une autre sphère avec le même centre, et avec un rayon plus petit que $\sigma$. On l'appelera $S'$. Soit $\eta'$ la limite inférieure de $I$ sur la surface $S'$. Ce nombre sera positif. Or $I$ est une fonction continue, donc à l'intérieur de $S'$, on pourra construire une troisième sphère $S''$, avec le centre $P'_0$, telle que la limite supérieure des valeurs de $I$ à son intérieur soit plus petite que $\eta'$.

Soit $\varepsilon$ le rayon de la dernière sphère.

Faisons maintenant mouvoir le point $P'$ d'après la loi représentée par les équations $(2)_0$ à partir d'une position interne à $S''$. Puisque $I$ doit garder une valeur constante pendant le mouvement, sa valeur sera égale à la valeur initiale, c'est à dire sera plus petite que $\eta'$. Par suite $P'$ ne rejoindra jamais la surface $S'$, d'où l'on déduit que sa distance du point $P'_0$ restera toujours plus petite que $\sigma$.

C. Q. F. D.

2. On peut généraliser la proposition précédente en démontrant le théorème:

*Soit $P'_0$ un point isolé d'une quartique appartenant au système* $(3)_0$, *et soit $\sigma$ un nombre aussi petit que l'on veut.*

*On pourra trouver deux nombres $\varepsilon$ et $\varepsilon'$ tels que*

*1° si l'on change $m_1$, $m_2$, $m_3$ de quantités constantes plus petites que $\varepsilon'$;*

*2° si dans sa position initiale on place $P'$ à une distance de $P'_0$ plus petite que $\varepsilon$,*

*le point $P'$ en se déplaçant ne s'éloignera de $P'_0$ au delà de $\sigma$.*

En effet envisageons de nouveau les trois sphères $S$, $S'$, $S''$ du paragraphe précédent. Soit $\eta''$ la limite supérieure des valeurs de $I$ à l'intérieur de $S''$. Nous aurons $\eta'' < \eta'$. Posons $\eta' - \eta'' = \rho$.

Puisque $I$ est une fonction continue de $m_1$, $m_2$, $m_3$, nous pourrons trouver un nombre $\varepsilon'$ tel qu'en changeant $m_1$, $m_2$, $m_3$ de quantités plus petites que $\varepsilon'$, les valeurs de $I$ à l'intérieur de la sphère $S$ changent moins que $\frac{\rho}{4}$. Par suite de ce changement la limite inférieure de $I$ sur $S'$ sera plus grande que $\eta' - \frac{\rho}{4}$ et la limite supérieure de $I$ à l'intérieur de $S''$ sera plus petite que $\eta'' + \frac{\rho}{4}$. Mais $\eta'' + \frac{\rho}{4} < \eta' - \frac{\rho}{4}$, donc en plaçant $P'$ dans un point initial interne à $S''$ il se déplacera sans jamais rejoindre la surface $S'$.

C. Q. F. D.

On peut énoncer le théorème que nous venons de démontrer en disant qu'*il y a une double stabilité des rotations permanentes qui correspondent aux points isolés: l'une par rapport aux changements du mouvement de rotation, et l'autre par rapport aux changements des mouvements internes.*

3. Passons maintenant à démontrer le théorème inverse de celui de l'article I, c'est à dire que *les points de l'hyperbole cubique qui ne sont des points isolés des quartiques correspondent à des rotations instables.*

Nous nous bornerons dans cet article au cas où aucune des conditions $(7)_c$ n'est satisfaite, en renvoyant à l'article IV pour la démonstration lorsque ces conditions sont vérifiées.

Cela posé on peut être sûr que sur chacune des surfaces $(3)_0$ n'existe qu'un nombre fini de positions d'équilibre du point $P'$. Désignons par $P'_0$ une de ces positions, et par $\mathfrak{f}_1^0$, $\mathfrak{f}_2^0$ les valeurs de $\mathfrak{f}_1$ et $\mathfrak{f}_2$ au point $P'_0$. On pourra construire une sphère $\Sigma$ ayant $P'_0$ pour centre, et telle

qu'aucun point des surfaces $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0$, qui est à son intérieur, soit une position d'équilibre de $P'$. Or si $P'_0$ n'est pas un point isolé de la quartique à laquelle il appartient, il y aura une branche réelle de cette courbe qui passe par $P'_0$.

Soit $VP'_0$ une partie de cette branche interne à $\Sigma$ et désignons par $2\sigma$ la distance entre les points $V$ et $P_0$. Enfin soit $VV'$ la partie connexe de $VP'_0$ qui est située externement à une sphère ayant $P'_0$ pour centre et dont le rayon est égal à $\frac{\varepsilon}{2}$; $\varepsilon$ étant un nombre plus petit que $\sigma$ et qu'on peut choisir d'ailleurs aussi petit que l'on veut. On voit bien aisément, en rappelant des théorèmes connus sur les fonctions implicites, qu'on pourra prendre le nombre $u$ de manière que chaque point de $VV'$ soit à une distance moindre que $\frac{\varepsilon}{2}$, d'un point de la quartique $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0 + u$, et en outre que celle-ci n'ait aucun point double. Il suffit pour cela de remarquer que sur la courbe $VV'$ on n'a aucun point d'équilibre et par suite il n'y a aucun point où les conditions $(4)_c$ soient satisfaites. On tire de là que sur la ligne $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0 + u$ existent deux points $W'$ et $W$, dont l'un est à une distance de $P'_0$ plus petite que $\varepsilon$, et l'autre à une distance plus grande que $\sigma$. Si l'on place $P'$ dans le point $W'$, il doit parcourir la ligne $f_1 = f_1^0$, $f_2 = f_2^0 + u$ et rejoindre le point $W$, c'est à dire en partant d'un point initial qui est éloigné de $P'_0$ moins que $\varepsilon$, il doit s'éloigner au delà de $\sigma$. Cela prouve que $P'_0$ est une position d'équilibre instable.

## Article III.

1. Tous les points d'équilibre du point $P'$, c'est à dire tous les points doubles des quartiques, se trouvent sur l'hyperbole cubique ayant pour équations les équations $(4')_c$.

Les théorèmes de l'article précédent montrent combien il est important de séparer sur cette courbe les parties où sont les points isolés de celles où sont les noeuds. Les points de passage entre les unes et les autres doivent correspondre aux cuspides des quadriques et nous donneront les points de passage entre les rotations permanentes stables et instables. Nous consacrerons cet article à cette séparation dans le cas général

où la cubique ne se décompose pas, c'est à dire lorsqu'on $A > B > C$, $m_1, m_2, m_3$ n'étant pas nulles. Nous renvoyons à l'article suivant pour le cas où ces conditions ne sont pas vérifiées.

2. En différentiant deux fois les équations $(3)_c$ on a

$$(8)_c \quad \begin{cases} Apdp + Bqdq + Crdr = 0, \\ A(Ap + m_1)dp + B(Bq + m_2)dq + C(Cr + m_3)dr = 0, \end{cases}$$

$$(9)_c \quad \begin{cases} Adp^2 + Bdq^2 + Cdr^2 + (Apd^2p + Bqd^2q + Crd^2r) = 0, \\ A^2dp^2 + B^2dq^2 + C^2dr^2 + \big(A(Ap + m_1)d^2p + B(Bq + m_2)d^2q \\ \qquad + C(Cr + m_3)d^2r\big) = 0. \end{cases}$$

Ajoutons les équations $(9)_c$, après avoir multipliée la première par $-\lambda$. On trouvera, ayant égard aux équations $(6')_c$,

$$A(A - \lambda)dp^2 + B(B - \lambda)dq^2 + C(C - \lambda)dr^2 = 0.$$

A cause des équations $(6)_c$, les deux équations $(8)_c$ sont équivalentes, par suite il suffira d'examiner les deux équations

$$(10)_c \quad \begin{cases} A(\lambda - A)dp^2 + B(\lambda - B)dq^2 + C(\lambda - C)dr^2 = 0, \\ Apdp + Bqdq + Crdr = 0. \end{cases}$$

Par l'élimination de $dr$ on trouve

$$A[Cr^2(\lambda - A) + Ap^2(\lambda - C)]dp^2 + B[Cr^2(\lambda - B) + Bq^2(\lambda - C)]dq^2$$
$$+ 2AB(\lambda - C)pqdpdq = 0.$$

A la place de $p, q, r$ substituons les valeurs $(6')_c$. Alors l'équation précédente deviendra

$$A\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - A)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Am_1^2(\lambda - C)}{(\lambda - A)^2}\right]dp^2 + B\left[\frac{Cm_3^2(\lambda - B)}{(\lambda - C)^2} + \frac{Bm_2^2(\lambda - C)}{(\lambda - B)^2}\right]dq^2$$
$$+ 2\frac{ABm_1m_2(\lambda - C)}{(\lambda - A)(\lambda - B)}dpdq = 0.$$

Pour séparer les valeurs de $\lambda$ qui correspondent aux points isolés de celles qui correspondent aux noeuds, il suffira d'examiner pour quelles

Il suffit pour voir cela de faire usage des équations $(6')_c$.

Les égalités précédentes démontrent le théorème:

*Dans les points de passage entre les points isolés et les noeuds, l'hyperbole cubique est tangente aux quadriques appartenant aux systèmes* $(3)_c$ *qui se touchent dans ces points.*

## Article IV.

1. Nous avons jusqu'à présent envisagé le cas où le produit $(5)_c$ ne s'annule pas. Nous allons maintenant traiter tous les cas qu'on a laissés de côté.

On peut suivre pour cela le même procédé qu'on vient d'employer. Puisque tous les calculs se répètent de la même manière, nous les supprimerons et nous nous bornerons à énoncer les résultats.

$$1^{\text{er}} \text{ Cas} \begin{cases} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{cases} \begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 \gtrless 0, \\ m_3 \gtrless 0, \end{cases}$$

La cubique se décompose en

- hyperbole $p=0,\ q=\dfrac{m_2}{\lambda-B},\ r=\dfrac{m_3}{\lambda-C}$
  - $\lambda$ comprise entre $A$ et $\dfrac{C\sqrt[3]{Bm_2^2}+B\sqrt[3]{Cm_3^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2}+\sqrt[3]{Cm_3^2}}$ *rotations instables*
  - $\lambda$ n'est pas comprise entre les limites précédentes *rotations stables*
- droite $q=\dfrac{m_2}{A-B},\ r=\dfrac{m_3}{A-C}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations stables.*

$$2^{\text{ème}} \text{ Cas} \begin{cases} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{cases} \begin{cases} m_1 \gtrless 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 \gtrless 0, \end{cases}$$

La cubique se décompose en

- hyperbole $p=\dfrac{m_1}{\lambda-A},\ q=0,\ r=\dfrac{m_3}{\lambda-C}$
  - $\lambda$ comprise entre $B$ et $\dfrac{A\sqrt[3]{Cm_3^2}+C\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Cm_3^2}+\sqrt[3]{Am_1^2}}$ *rotations instables*
  - $\lambda$ n'est pas comprise entre les limites précédentes *rotations stables*
- droite $p=\dfrac{m_1}{B-A},\ r=\dfrac{m_3}{B-C}$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations instables.*

$$3^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \begin{cases} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{cases} \begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 \gtrless 0, \end{cases}$$

**La cubique se décompose en**

- droite $p = 0,\ q = 0$
  - $r$ comprise entre $\dfrac{m_3}{A-C}$ et $\dfrac{m_3}{B-C}$ *rotations instables*
  - $r$ n'est pas compris entre les limites précédentes . . . . . . . *rotations stables*
- droite $q = 0,\ r = \dfrac{m_3}{A-C}$ . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations stables*
- droite $p = 0,\ r = \dfrac{m_3}{B-C}$ . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations instables*

$$4^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \begin{cases} A > B > C \\ \text{ou} \\ A < B < C \end{cases} \begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 \gtrless 0, \\ m_3 = 0, \end{cases}$$

**La cubique se décompose en**

- droite $p = 0,\ r = 0$
  - $q$ comprise entre $\dfrac{m_2}{A-B}$ et $\dfrac{m_2}{C-B}$ *rotations stables*
  - $q$ n'est pas comprise entre les limites précédentes . . . . . . . *rotations instables*
- droite $q = \dfrac{m_2}{A-B},\ r = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations stables*
- droite $p = 0,\ q = \dfrac{m_2}{C-B}$ . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations stables*

$$5^{\text{ème}}\ \text{Cas}\ \begin{cases} A > B > C, \\ m_1 = m_2 = m_3 = 0, \end{cases} \qquad \text{(Cas d'Euler)}$$

**La cubique se décompose en**

- droite $p = 0,\ q = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations stables*
- droite $q = 0,\ r = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations stables*
- droite $r = 0,\ p = 0$ . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . *rotations instables*

$$6^{\text{ème}}\ \text{Cas}^{1}\quad A \gtrless B = C \begin{cases} m_1 \gtrless 0, \\ m_2 \gtrless 0, \\ m_3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{La cubique se décompose en} \begin{cases} \text{hyperbole} \\ p = \dfrac{m_1}{\lambda - A},\ q = \dfrac{m_2}{\lambda - B},\ r = 0 \begin{cases} \lambda \text{ comprise entre } B \text{ et} \\ \dfrac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}} \ \ldots \ \textit{rotations instables} \\ \lambda \text{ n'est pas comprise entre} \\ \text{les limites précédentes} \ .\ \textit{rotations stables} \end{cases} \\ \text{droite } p = \dfrac{m_1}{B - A},\ q = \infty. \end{cases}$$

$$7^{\text{ème}}\ \text{Cas}\quad A \gtrless B = C \begin{cases} m_1 = 0, \\ m_2 \gtrless 0,\ ^{2} \\ m_3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{La cubique se décompose en} \begin{cases} \text{droite } p = 0,\ r = 0 \begin{cases} q > \dfrac{m_2}{A - B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textit{rotations instables} \\ q < \dfrac{m_2}{A - B} \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textit{rotations stables} \end{cases} \\ \text{droite } q = \dfrac{m_2}{A - B},\ r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \textit{rotations stables} \\ \text{droite } p = 0,\ q = \infty. \end{cases}$$

2. Il faut maintenant discuter les cas où le lieu des points d'équilibre de $P'$ devient un plan et une droite

$$1^{\text{er}}\ \text{Cas}\quad A \gtrless B = C \begin{cases} m_1 \gtrless 0 \quad \text{ou} \quad m_1 = 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 = 0, \end{cases}$$

$$\text{Le lieu des points d'équilibre de } P \text{ devient} \begin{cases} \text{droite } q = 0,\ r = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ \textit{rotations stables} \\ \text{plan } p = \dfrac{m_1}{B - A}\ (q \text{ et } r \text{ quelconques})\ .\ \textit{rotations instables} \end{cases}$$

---

[1] Lorsque $A \gtrless B = C$ on peut choisir les axes d'inertie de manière qu'on ait $m_3 = 0$.

[2] Dans ce cas nous supposons qu'on ait choisi les directions des axes de sorte que $m_2$ et $A - B$ aient le même signe; ce qui est toujours possible.

$$2^{\text{ème}} \text{ Cas } A = B = C \begin{cases} m_1 \gtrless 0, \\ m_2 = 0, \\ m_3 = 0, \end{cases}$$

Le lieu des points d'équilibre de $P$ devient $\begin{cases} \text{droite } q = 0, \ r = 0 \ \ldots\ldots\ldots\ldots \textit{rotations stables} \\ \text{plan } p = \infty. \end{cases}$

Pour démontrer dans le premier cas que les rotations correspondantes à $p = \frac{m_1}{B-A}$ et $q$ et $r$ quelconques sont *instables* on ne peut pas appliquer le théorème qu'on a démontré au § 3 de l'article II.

Remarquons que dans ce cas les intersections des quadriques $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ sont un couple de cercles. Les points doubles correspondent au cas où les deux cercles coïncident. Alors les deux quadriques sont tangentes le long du cercle double. Tous les cercles d'intersection ou de contact des quadriques $f_1 = h_1$, $f_2 = h_2$ sont placés dans des plans perpendiculaires à l'axe de symétrie des deux quadriques et leurs centres sont situés sur cette droite. Le point $P$ est en équilibre dans un point quelconque appartenant aux cercles doubles qui sont placés dans le plan $p = \frac{m_2}{B-A}$; mais aussi près de ces cercles que l'on veut existent des couples de cercles simples qui sont parcourus par le point $P'$ avec une vitesse constante.

Cette remarque suffit pour montrer que l'équilibre du point $P'$ dans les points du plan $p = \frac{m_1}{B-A}$ est instable, et par suite que les rotations permanentes qui correspondent à ces positions sont instables. On tire de là que *le théorème donné dans l'article deuxième du* § 3 *peut s'étendre au cas qu'on avait exclu.*

3. Il reste encore à examiner un cas particulier, savoir lorsque les trois systèmes d'équations $(7)_c$ sont vérifiés. On aura alors

$$A = B = C; \qquad m_1 = m_2 = m_3 = 0.$$

Dans ce cas $P'$ est en équilibre dans tout point de l'espace; par suite tout point de l'espace est une position d'équilibre stable.

Mais on voit aisément que dans ce cas il n'y a pas de stabilite par rapport à des changements des mouvements internes.

En effet choisissons les axes de manière que l'on ait

$$p \gtrless 0, \qquad q = 0, \qquad r = 0.$$

Si nous prenons

$$m_1 = 0, \qquad m_2 \gtrless 0, \qquad m_3 = 0$$

on aura que, quelque petite que soit la valeur absolue de $m_2$, la trajectoire de $P'$ sera un cercle situé dans le plan $q = 0$, ayant le rayon égale à $p$, et dont le centre est l'origine des axes coordonnées.

Donc les rotations sont *stables* par rapport à des changements des rotations mémes, mais elles sont instables par rapport au mouvement interne.

De cette manière tous les cas qui peuvent se présenter ont été discutés et dans chacun on a distingué les rotations stables et instables.

## Article V.

1. Nous allons développer quelques conséquences des théorèmes des articles précédents.

Commençons par supposer $A > B > C$, $m_1 = m_2 = m_3 = 0$. Nous envisageons le V$^e$ cas de l'article IV. On peut alors dire que si le couple de quantité de mouvement est suffisamment petit, en prenant la position initiale du pôle de rotation assez proche d'une extrémité de l'axe d'inertie dont le moment est maximum, ou de celui dont le moment est minimum, la polodie sera aussi proche que l'on veut au pôle d'inertie.

2. Une remarque, qui parait digne d'intérêt, peut être déduit tout de suite des considérations précédentes.

*Si l'on voit le pôle de rotation faire des petites oscillations autour d'un certain point, même si le système ne change de forme, ni la distribution des masses ne change non plus, on ne pourra pas conclure que le point autour duquel le pôle oscille soit un pôle d'inertie.*

En effet si à l'intérieur du système existent des mouvements stationnaires, le point autour duquel oscille le pôle de rotation au lieu d'être

le pôle d'inertie sera l'intersection de l'ellipsoïde d'inertie avec le rayon vecteur d'un des points isolés des quartiques que nous avons précédemment envisagées.

3. Passons maintenant à l'étude des petites vibrations de $P'$ autour des positions d'équilibre stable.

Supposons d'abord que la cubique $(4')_c$ ne se décompose pas et désignons par $\lambda_1$ et $\lambda_2$ les racines réelles de l'équation $(12)_c$. Prenons $\lambda$ de manière qu'elle ne soit pas comprise entre ces valeurs. Alors

$$(13)_c \qquad p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A}, \qquad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B}, \qquad r_0 = \frac{m_3}{\lambda - C}$$

seront des valeurs correspondant à une position d'équilibre stable de $P'$, c'est à dire à une rotation permanente stable du système.

Posons

$$p = p_0 + \varpi, \qquad q = q_0 + \chi, \qquad r = r_0 + \rho$$

et supposons que $\varpi, \chi, \rho$ soient des quantités très-petites de manière qu'on puisse négliger les expressions du second ordre formées avec elles par rapport aux mêmes quantités. Alors, puisque les valeurs constantes $p_0, q_0, r_0$ satisfont aux équations $(4')_c$, les équations $(2)_c$ pourront s'écrire

$$(14)_c \qquad \begin{cases} A\dfrac{d\varpi}{dt} + \dfrac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C}\chi - \dfrac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B}\rho = 0, \\[2ex] B\dfrac{d\chi}{dt} + \dfrac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A}\rho - \dfrac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C}\varpi = 0, \\[2ex] C\dfrac{d\rho}{dt} + \dfrac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B}\varpi - \dfrac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A}\chi = 0. \end{cases}$$

Pour intégrer ces équations posons

$$\varpi = ae^{zt}, \qquad \chi = be^{zt}, \qquad \rho = ce^{zt},$$

$a, b, c, z$ étant des quantités constantes. $z$ sera une racine de l'équation

$$\begin{vmatrix} Az & , & \dfrac{m_3(\lambda - B)}{\lambda - C} & , & -\dfrac{m_2(\lambda - C)}{\lambda - B} \\[2ex] -\dfrac{m_3(\lambda - A)}{\lambda - C} & , & Bz & , & \dfrac{m_1(\lambda - C)}{\lambda - A} \\[2ex] \dfrac{m_2(\lambda - A)}{\lambda - B} & , & -\dfrac{m_1(\lambda - B)}{\lambda - A} & , & Cz \end{vmatrix} = 0.$$

En développant le déterminant on trouve

$$ABCz^3 + (\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^2} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^2} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^2}\right]z = 0$$

d'où l'on tire

$$z = 0, \qquad z = \pm i\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^2} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^2} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^2}\right]}.$$

De l'hypothèse que nous avons faite par rapport aux valeurs de $\lambda$, on peut déduire que les racines $z$ qui ne sont pas nulles, sont imaginaires. Par suite la période de vibration du point $P'$ autour de la position d'équilibre stable sera

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{(\lambda - A)(\lambda - B)(\lambda - C)}{ABC}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^2} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^2} + \frac{Cm_3^2}{(\lambda - C)^2}\right]}}.$$

Si l'on change $\lambda$ entre les limites établies au commencement de ce paragraphe, *la formule précédente donnera toutes les périodes avec lesquelles le pôle de rotation peut osciller autour des positions d'équilibre stable.* Ajoutons les équations $(14)_c$, après les avoir multipliées par $\frac{m_1}{\lambda - A}, \frac{m_2}{\lambda - B}, \frac{m_3}{\lambda - C}$. On aura

$$\frac{Am_1}{\lambda - A}\frac{d\varpi}{dt} + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\frac{d\chi}{dt} + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\frac{d\rho}{dt} = 0$$

et en intégrant

$$(15)_c \qquad \frac{Am_1}{\lambda - A}\varpi + \frac{Bm_2}{\lambda - B}\chi + \frac{Cm_3}{\lambda - C}\rho = \text{const.}$$

De même ajoutons les équations $(14)_c$ après les avoir multipliées par $(\lambda - A)\varpi$, $(\lambda - B)\chi$, $(\lambda - C)\rho$ Nous trouverons en intégrant

$$(16)_c \qquad A(\lambda - A)\varpi^2 + B(\lambda - B)\chi^2 + C(\lambda - C)\rho^2 = \text{const.}$$

Ces intégrales montrent que le mouvement du point $P'$ a lieu sur une ellipse appartenant au plan $(14)_c'$, c'est à dire à un plan parallèle au plan tangent aux surfaces $(3)_c$ au point $p_0, q_0, r_0$.

4. Il n'y a pas de difficulté à discuter les cas particuliers qui peuvent se présenter. Il suffit pour cela d'avoir égard aux résultats qu'on a établi dans l'article précédent.

Nous examinerons seulement le cas où deux des moments d'inertie sont égaux, le troisième étant différent. C'est à dire quand on a

$$A \gtrless B = C.$$

Alors en choisissant les axes d'inertie de manière qu'on ait $m_3 = 0$, et en employant les résultats qu'on a trouvé dans le cas VI de l'article IV, on aura que les rotations stables seront données par

$$p_0 = \frac{m_1}{\lambda - A}, \qquad q_0 = \frac{m_2}{\lambda - B}, \qquad r_0 = 0,$$

$\lambda$ étant compris entre

$$B \text{ et } \frac{A\sqrt[3]{Bm_2^2} + B\sqrt[3]{Am_1^2}}{\sqrt[3]{Bm_2^2} + \sqrt[3]{Am_1^2}}$$

Par suite les périodes des vibrations du pôle de rotation autour des positions d'équilibre stable seront données par la formule

$$T = \frac{2\pi B}{(\lambda - B)\sqrt{\frac{\lambda - A}{A}\left[\frac{Am_1^2}{(\lambda - A)^3} + \frac{Bm_2^2}{(\lambda - B)^3}\right]}} = \frac{2\pi}{\frac{m_2}{Bq_0}\sqrt{\frac{m_1}{Ap_0}\left[\frac{Ap_0^3}{m_1} + \frac{Bq_0^3}{m_2}\right]}}.$$

Lorsqu'il n'y a pas de mouvements internes il y a une seule position d'équilibre stable du pôle de rotation (I cas, article IV) qui correspond à $p = p_0$, $q = r = 0$ et la période de vibration du pôle autour de cette position est donnée par la période éulerienne $\frac{2\pi B}{(B - A)p_0}$. On tire de là que les mouvements internes donnent naissance à un nombre infini de positions d'équilibre stable du pôle et changent les valeurs de la période eulerienne de manière qu'elle peut prendre toutes les valeurs données par la formule précédente.

---

# CHAPITRE IV.

## *Rotation d'un corps à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique quelconque.*

### Article I.

1. Dans les chapitres précédents nous avons étudié la rotation d'un corps dans lequel existent des mouvements stationnaires.

Il faut en général l'intervention de forces à l'intérieur pour maintenir stationnaires ces mouvements. On peut maintenant approfondir l'étude de ces forces et voir pourquoi et quand elles sont nécessaires (article VI, § 3), et l'on peut étudier après ce qu'il arrive lorsqu'elles n'existent pas (article VII, VIII), ou lorsqu'elles ne sont pas capables de maintenir tous les mouvements stationnaires (article IX).

L'étude de ces questions sera le but de ce chapitre dans lequel nous introduirons les idées et la terminologie que HELMHOLTZ a employées dans ses travaux sur les systèmes cycliques.[1]

2. Commençons par déterminer la force vive de tout système qui tourne autour d'un point fixe.

Soit $\xi, \eta, \zeta$ un système d'axes en mouvement dont l'origine est fixe. Désignons par $p, q, r$ les composantes de la vitesse angulaire de rotation dans la direction des axes.

Supposons que $u, v, w$ soient les composantes de la vitesse relative aux axes $\xi, \eta, \zeta$ d'un point du système ayant pour coordonnées $\xi, \eta, \zeta$. Alors les composantes de la vitesse absolue seront

$$u + q\zeta - r\eta\,, \quad v + r\xi - p\zeta, \quad w + p\eta - q\xi.$$

Si la densité du système est $\rho$, la force vive sera

$$T = \frac{1}{2}\int_S \rho\{(u + q\zeta - r\eta)^2 + (v + r\xi - p\zeta)^2 + (w + p\eta - q\xi)^2\}dS$$

[1] Crelle's Journal. Bd. 97.

$S$ étant l'espace occupé par le système en mouvement. On tire de la

$$(1)_d \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0$$

où l'on a désigné par $A$, $B$, $C$ les moments d'inertie du système par rapport aux axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$; par $D$, $E$, $F$ les moments mixtes d'inertie par rapport aux couples d'axes $\eta$, $\zeta$; $\zeta$, $\xi$; $\xi$, $\eta$, et l'on a posé

$$m_1 = \int_S \rho(w\eta - v\zeta)dS, \qquad m_2 = \int_S \rho(u\zeta - w\xi)dS, \qquad m_3 = \int_S \rho(v\xi - u\eta)dS,$$

$$T_0 = \frac{1}{2}\int_S \rho(u^2 + v^2 + w^2)dS.$$

On a donc désigné par $m_1$, $m_2$, $m_3$ les composantes du couple de quantité de mouvement relatif aux axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ et par $T_0$ la force vive du même mouvement relatif.

3. On peut appeler ces mouvements relatifs les *mouvements internes du système*. S'ils ne changent la forme ni la distribution de la densité à l'intérieur du système ils vérifieront la condition

$$\frac{\partial(\rho u)}{\partial\xi} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial\eta} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial\zeta} = 0$$

et le long de toute surface de discontinuité on aura

$$\rho(u\cos nx + v\cos ny + w\cos nz) = \rho'(u'\cos nx + v'\cos ny + w'\cos nz)$$

en désignant par $n$ la normale à la surface de discontinuité, par $\rho$, $u$, $v$, $w$ la densité et les composantes de la vitesse d'un côté de cette surface, et par $\rho'$, $u'$, $v'$, $w'$ les valeurs des mêmes quantités de l'autre côté.

En général $m_1$, $m_2$, $m_3$, $T_0$ seront des fonctions du temps, mais si les mouvements internes seront *stationnaires* on devra les regarder comme des constantes.

### Article II.

1. Lorsque les mouvements internes sont stationnaires et le système n'est pas soumis à des forces externes on a les relations (voir introduction)

$$(2)_d \qquad \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = \text{const.}$$

$$(3)_d \qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = \text{const.}$$

Si la force vive $T$ est constante (voir article précédent § 2) on doit avoir

$$(4)_d \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \text{const.}$$

puisque $T_0$ est constante.

Nous allons déterminer les conditions pour que la relation précédente soit satisfaite, quelles que soient les conditions initiales du mouvement.

2. En dérivant l'équation $(4)_d$ par rapport à $t$, on trouve

$$(4')_d \qquad m_1 \frac{dp}{dt} + m_2 \frac{dq}{dt} + m_3 \frac{dr}{dt} = 0.$$

Multiplions les équations différentielles du mouvement (voir introduction)

$$A\frac{dp}{dt} + (C - B)qr + m_3 q - m_2 r = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A - C)rp + m_1 r - m_3 p = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B - A)pq + m_2 p - m_1 q = 0,$$

par $\frac{m_1}{A}, \frac{m_2}{B}, \frac{m_3}{C}$. En les ajoutant on aura, à cause de l'équation $(4')_d$

$$\frac{m_1}{A}(B - C)qr + \frac{m_2}{B}(C - A)rp + \frac{m_3}{C}(A - B)pq$$

$$- m_2 m_3\left(\frac{1}{C} - \frac{1}{B}\right)p - m_3 m_1\left(\frac{1}{A} - \frac{1}{C}\right)q - m_1 m_2\left(\frac{1}{B} - \frac{1}{A}\right)r = 0.$$

Il est aisé de trouver les conditions *nécessaires* et *suffisantes* pour que cette équation soit satisfaite quelles que soient les valeurs de $p, q, r$.

Elles sont ou

$$A = B = C,$$

ou

$$B = C, \qquad m_2 = m_3 = 0$$

ou

$$C = A, \qquad m_3 = m_1 = 0$$

ou enfin

$$A = B, \qquad m_1 = m_2 = 0.$$

On tire de là le théorème suivant: *Il est nécessaire et suffisant pour que la force vive du système soit constante, quel que soit le mouvement initial, que l'ellipsoïde d'inertie soit une sphère, ou qu'il soit un ellipsoïde de révolution par rapport à l'axe du mouvement interne.* [1]

3. On peut maintenant se poser la question suivante:

En prenant d'une façon particulière les conditions initiales du mouvement, est-ce qu'on peut trouver d'autres cas dans lesquels la force vive reste constante?

On peut répondre tout de suite affermativement à cette question; à cet effet il suffit de remarquer que la force vive sera constante toutes les fois que le mouvement de rotation du système sera permanent (voir le chapitre III). Mais ce cas n'est pas le seul; il y en a aussi d'autres.

Pour les trouver il suffit de chercher les conditions qui doivent être remplies pour que les équations $(2)_d$, $(3)_d$, $(4)_d$ aient un nombre infini de racines communes. Par l'élimination de $p$ entre ces équations on trouve

$$B(B-A)q^2 + C(C-A)r^2 + 2(B-A)m_2 q + 2(C-A)m_3 r = \text{const.},$$

$$(Am_2^2 + Bm_1^2)q^2 + (Am_3^2 + Cm_1^2)r^2 + 2Am_2 m_3 qr - 2Agm_2 q - 2Agm_3 r = \text{const.},$$

ayant posé

$$(4)_d \qquad g = m_1 p + m_2 q + m_3 r = \text{const.}$$

[1] Il est évident que le dernier cas comprend le premier.

Les équations précédentes auront un nombre infini de racines communes lorsque leur résultante aura tous ses coefficients nuls.

Si l'on écrit que le coefficient du terme de $4^{ème}$ degré est nul, il vient

$$\{m_1^2 BC(B-C) + m_2^2 CA(C-A) + m_3^2 AB(A-B)\}^2$$
$$+ 4ABC\{m_2^2 m_3^2 A(B-A)(C-A) + m_3^2 m_1^2 B(C-B)(A-B)$$
$$+ m_1^2 m_2^2 C(A-C)(B-C)\} = 0.$$

Cette équation sera satisfaite seulement si l'on a

$$A = B = C,$$

ou si $m_1$, ou $m_2$, ou $m_3$ s'annule. En effet on peut l'écrire

$$\begin{aligned} &\{m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B)\}^2 \\ &\qquad + 4A^2 BC m_2^2 m_3^2 (B-A)(C-A) \\ &= \{m_2^2 CA(C-A) - m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C)\}^2 \\ &\qquad + 4B^2 CA m_3^2 m_1^2 (C-B)(A-B) \\ &= \{m_3^2 AB(A-B) - m_1^2 BC(B-C) - m_2^2 CA(C-A)\}^2 \\ &\qquad + 4C^2 AB m_1^2 m_2^2 (A-C)(B-C) = 0. \end{aligned}$$

On tire de là que, si la condition $A = B = C$ n'est pas satisfaite et si les quantités $m_1, m_2, m_3$ ne sont pas nulles, $T$ sera constante seulement lorsque $p, q, r$ seront constantes. D'où l'on déduit le théorème:

*Si l'on a un système qui n'est pas soumis à des forces externes et dans lequel subsistent des mouvement stationnaires, la condition nécessaire et suffisante pour que la force vive soit constante, lorsque $A, B, C$ ne sont pas égaux, et $m_1, m_2, m_3$ ne sont pas nuls, est que la rotation du système soit permanente.*

4. Supposons maintenant qu'on ait $m_2 = 0$. Alors la dernière équation s'écrira

$$m_1^2 C(B-C) - m_3^2 A(A-B) = 0$$

d'où

$$\frac{m_1}{m_3} = \pm\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}.$$

Donc il faut que $B$ soit comprise entre $A$ et $C$. En supposant $A > B > C$ on pourra poser

$$m_1 = \varepsilon \sqrt{A(A-B)}, \qquad m_3 = \pm \varepsilon \sqrt{C(B-C)}$$

$\varepsilon$ désignant une quantité constante réelle. Les équations $(2)_d$ et $(3)_d$ deviendront

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

$$A^2p^2 + B^2q^2 + C^2r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{const.}$$

Par l'élimination de $q$ entre ces équations on trouve

$$A(A-B)p^2 + C(C-B)r^2 + 2\varepsilon A\sqrt{A(A-B)}\,p \pm 2\varepsilon C\sqrt{C(B-C)}\,r = \text{const.}$$

Cette égalité peut s'écrire de la manière suivante

$$(5)_d \qquad [\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C)]$$
$$\times [\sqrt{A(A-B)}\,p \mp \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A+C)] = \text{const.}$$

Supposons que les valeurs initiales de $p$ et de $r$ soient telles que le premier facteur du premier membre de l'équation précédente soit nul; on peut démontrer alors que ce facteur sera toujours nul. Cette proposition est évidente lorsque les valeurs initiales de $p$ et de $r$ n'annulent pas le deuxième facteur. Mais s'ils l'annulent, alors on a

$$p = \frac{-\varepsilon A}{\sqrt{A(A-B)}} = \frac{m_1}{B-A}, \qquad r = \frac{\pm \varepsilon C}{\sqrt{C(B-C)}} = \frac{\pm \varepsilon\sqrt{C(B-C)}}{B-C} = \frac{m_3}{B-C}$$

et par suite le mouvement de rotation est permanent (voir chapitre III, article IV, § 1, 3ème cas). $p$ et $r$ garderont alors une valeur constante et par conséquent le premier facteur sera toujours nul.

Observons maintenant que si le premier facteur est nul, la condition $(4)_d$ peut être déduite comme une conséquence. On peut donc conclure: *la force vive sera constante lorsqu'on a*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}, \qquad m_2 = 0, \qquad m_3 = \pm \varepsilon\sqrt{C(B-C)}$$

*et que les conditions initiales du mouvement sont telles que l'égalité*

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + \varepsilon(A-C) = 0$$

*soit vérifiée, $q$ ayant une valeur quelconque.*

Réciproquement si la condition $(4)_d$ doit être remplie, ou elle doit coïncider avec l'équation qu'on obtient en annulant le premier facteur de l'équation $(5)_d$, ou les deux facteurs du premier membre de cette équation devront être constants et par suite $p$, $q$, $r$ seront constants, c'est à dire le mouvement de rotation sera permanent.

Remarquons enfin que si l'on suppose que non seulement $m_2$, mais $m_1$ ou $m_3$ soit nul, alors il faut qu'on ait $B = A$ ou $B = C$, c'est pourquoi on revient aux cas envisagés auparavant (§ 2).

5. On peut résumer l'analyse qu'on vient de faire dans cette proposition:

*Tous les cas particuliers dans lesquels la force vive du système est constante se réduisent aux suivants:*

1° *Le mouvement de rotation du système est permanent;*

2° *On a, ε étant une constante*

$$m_1 = \varepsilon\sqrt{A(A-B)}, \qquad m_2 = 0, \quad m_3 = \pm\,\varepsilon\sqrt{C(B-C)}, \qquad A > B > C$$

*et les conditions initiales sont telles que*

$$p\sqrt{A(A-B)} \pm \sqrt{C(B-C)} + \varepsilon(A-C) = 0;$$

3° *L'ellipsoïde d'inertie est de révolution autour de l'axe du mouvement interne.*

*Dans le* 3ème *cas les conditions initiales du mouvement peuvent être quelconques.*

Les cas précédents exceptés, la force vive du système doit changer; par suite il faut des forces pour maintenir stationnaire le mouvement interne. C'est pourquoi si ces forces n'existent pas le mouvement interne doit cesser d'être stationnaire.

Donc *de la même manière que les mouvements internes changent le mouvement de rotation du système, celui-ci tend à changer les mouvements internes.*

6. Nous venons de trouver les conditions nécessaires et suffisantes pour que la force vive du système soit constante. Or ces conditions sont nécessaires pour que le mouvement interne se maintienne stationnaire

sans qu'il intervienne aucune force, mais évidemment elles ne sont pas suffisantes. En effet la somme des travaux des forces qui servent à maintenir stationnaire le mouvement peut être nulle, sans que chaque force soit nulle.

Nous verrons dans l'article VI les conditions nécessaires et suffisantes pour que le mouvement soit stationnaire lorsqu'aucune force n'agit.

## Article III.

1. Nous avons vu dans l'article précédent que la force vive d'un système où subsistent des mouvements stationnaires change en général avec le temps. Nous consacrerons cet article pour en calculer l'expression.

Il suffit pour cela d'employer les formules que nous avons trouvées dans le chapitre II, article III, § 3. On a

$$p = m_1 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - A}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - A}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - A}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - A}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_1 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - A}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

$$q = m_2 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - B}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - B}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - B}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - B}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_2 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - B}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i},$$

$$r = m_3 \frac{\frac{M_1}{\lambda_1 - C}\sigma_1 + \frac{M_2}{\lambda_2 - C}\sigma_2 + \frac{M_3}{\lambda_3 - C}\sigma_3 + \frac{M_4}{\lambda_4 - C}\sigma}{M_1\sigma_1 + M_2\sigma_2 + M_3\sigma_3 + M_4\sigma} = m_3 \frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i - C}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i}$$

où pour symétrie on a remplacé $\sigma$ par $\sigma_4$.

On tire de là

$$(6)_d \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i}.$$

Mais les quantités $\lambda_i$ sont les racines de l'équation (voir $(25')_b$)

$$\frac{Am_1^2}{\lambda - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda - C} + 2h\lambda - K_1 = 0$$

par suite on aura

$$\lambda_i\left(\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C}\right) - (m_1^2 + m_2^2 + m_3^2)$$

$$= \frac{Am_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{Bm_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{Cm_3^2}{\lambda_i - C} = -2h\lambda_i + K_1.$$

Ayant égard à l'équation $(24)_b$ on peut écrire

$$K_1 + m_1^2 + m_2^2 + m_3^2 = K^2$$

donc (comparer $(25'')_b$)

$$\frac{m_1^2}{\lambda_i - A} + \frac{m_2^2}{\lambda_i - B} + \frac{m_3^2}{\lambda_i - C} = \frac{K^2}{\lambda_i} - 2h$$

et enfin

$$(6')_d \qquad m_1 p + m_2 q + m_3 r = \frac{\sum_1^4{}_i M_i\left(\frac{K^2}{\lambda_i} - 2h\right)\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} = K^2\frac{\sum_1^4 \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} - 2h.$$

2. Il n'y a plus maintenant de difficulté pour calculer la force vive. Il suffit d'employer la formule $(1)_d$ de l'article I dans laquelle on prendra $D = E = F = 0$. On aura

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0.$$

Mais (voir $(2)_d$)

$$\frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) = h = \text{const.}$$

Donc, à cause de l'égalité $(6')_d$, on trouvera

$$T = K^2\frac{\sum_1^4{}_i \frac{M_i}{\lambda_i}\sigma_i}{\sum_1^4 M_i\sigma_i} - h + T_0.$$

**Article IV.**

1. Examinons maintenant les variations produites par le mouvement de rotation du système sur le mouvement interne lorsqu'il n'y a pas de forces capables de le maintenir stationnaire.

Pour simplifier nous envisagerons d'abord un cas particulier, et dans les articles suivants nous discuterons le cas le plus général.

2. Supposons que le mouvement interne soit la rotation d'un tore de révolution homogène autour du son axe de symétrie, et que celui-ci soit fixe dans l'intérieur du corps.

Désignons par $\omega$ la vitesse angulaire de rotation du tore, par $\alpha, \beta, \gamma$ les cosinus de direction de l'axe du tore avec les axes d'inertie du système $\xi, \eta, \zeta$; par $\mu$ le moment d'inertie du tore par rapport à l'axe de symétrie.

Les composantes du couple de quantité de mouvement due au mouvement interne dans les directions $\xi, \eta, \zeta$ seront

$$m_1 = \mu\omega\alpha, \qquad m_2 = \mu\omega\beta, \qquad m_3 = \mu\omega\gamma$$

et la force vive du mouvement interne sera

$$T_0 = \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Par suite la force vive du système, dont la forme et la distribution des masses ne changera pas, sera (voir $(1)_d$)

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2.$$

Si le système n'est soumis à aucune force externe nous pouvons écrire les équations du mouvement de la manière suivante (voir introduction)

$$(7)_d \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C - B)qr + \mu\omega(q\gamma - r\beta) + \mu\alpha\dfrac{d\omega}{dt} = 0, \\[2ex] B\dfrac{dq}{dt} + (A - C)rp + \mu\omega(r\alpha - p\gamma) + \mu\beta\dfrac{d\omega}{dt} = 0, \\[2ex] C\dfrac{dr}{dt} + (B - A)pq + \mu\omega(p\beta - q\alpha) + \mu\gamma\dfrac{d\omega}{dt} = 0. \end{cases}$$

Si le tore aussi, en tournant autour de son axe, n'est soumis à aucune force, on aura, à cause du principe des forces vives

$$(1')_d \qquad T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2) + \mu\omega(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \frac{1}{2}\mu\omega^2 = \text{const.}$$

3. Nous avons trouvé quatre équations $(7)_d$ et $(1')_d$ où paraissent quatre fonctions inconnues, c'est à dire $p, q, r, \omega$. Les quantités $p, q, r$ déterminent la rotation du système, et $\omega$ détermine le mouvement interne.

En dérivant l'équation $(1')_d$ par rapport à $t$ on trouve

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu\omega\left(\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt}\right)$$
$$+ \mu\frac{d\omega}{dt}(p\alpha + q\beta + r\gamma) + \mu\omega\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

Ajoutons les équations $(7)_d$ après les avoir multipliées par $p, q, r$. Il viendra

$$Ap\frac{dp}{dt} + Bq\frac{dq}{dt} + Cr\frac{dr}{dt} + \mu(p\alpha + q\beta + r\gamma)\frac{d\omega}{dt} = 0.$$

D'où

$$\alpha\frac{dp}{dt} + \beta\frac{dq}{dt} + \gamma\frac{dr}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = 0$$

et en intégrant

$$(8)_d \qquad \omega + \alpha p + \beta q + \gamma r = \text{const.}$$

Entre $\omega, p, q, r$ subsiste donc une relation linéaire à coefficients constants. A l'aide de cette relation on peut éliminer $\omega$ dans les équations $(7)_d$. En intégrant ces équations on aura $p, q, r$ et par suite, à cause de l'équation $(8)_d$, on aura $\omega$.

Il est aisé de voir sans même faire des calculs que le problème de l'intégration peut se reconduire aux quadratures et qu'on obtient des fonctions elliptiques. Il suffit pour cela de remarquer que par le principe de la conservation des aires on a l'intégrale suivante des équations $(7_d)$

$$(Ap + \mu\omega\alpha)^2 + (Bq + \mu\omega\beta)^2 + (Cr + \mu\omega\gamma)^2 = \text{const.}$$

Remplaçons dans cette équation et dans l'équation $(1')_d$ $\omega$ par la valeur qu'on tire de l'équation $(8)_d$. On trouvera deux relations de 2ème degré entre $p, q, r$. On déduit de là que $p, q, r$ peuvent s'exprimer comme des fonctions elliptiques d'un paramètre, et par une quadrature on peut trouver une relation entre ce paramètre et le temps. L'équation $(8)_d$ montre que même $\omega$ peut s'obtenir d'une manière analogue. Nous en resterons là dans la solution de ce cas particulier, parce que nous considérerons le cas général dans les articles suivants.

## Article V.

1. Nous allons discuter la question tout à fait générale de la rotation autour du centre de gravité d'un corps dans lequel existe un système polycyclique quelconque.[1] Le cas que nous avons étudié dans l'article précédent n'est qu'un cas très-particulier de mouvement monocyclique. Nous pouvons supposer des mouvements polycicliques de plusieurs sortes. Comme type nous pouvons par exemple envisager approximativement des réseaux de canaux dont les sections soient très-petites par rapport à leurs longueurs, et dans lesquels circulent des fluides homogènes.[1]

2. Soient $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ les coordonnées cycliques du système et $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ soient les paramètres.

L'expression de la force vive du mouvement interne sera en général

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\frac{dp_i}{dt}\frac{dp_s}{dt} + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b_{hk}\frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d\varpi_k}{dt} + \sum_1^n \sum_1^m{}_h c_{ih}\frac{dp_i}{dt}\frac{d\varpi_h}{dt}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s a_{is}\,\omega_i\omega_s + \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b_{hk}\frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d\varpi_k}{dt} + \sum_1^n{}_i \sum_1^m{}_h c_{ih}\,\omega_i\frac{d\varpi_h}{dt}$$

en désignant par $\omega_i = \frac{dp_i}{dt}$ les intensités cycliques du système.

Nous verrons après les termes qu'on doit négliger dans cette expression. Les coefficients $a_{is}, b_{hk}, c_{ih}$ seront des fonctions des paramètres.

---

[1] Voir HERTZ, *Die Prinzipien der Mechanik.* Zweites Buch. Abschnitt 5.

[2] Dans l'art. IX nous envisagerons un cas de rotation d'un solide qui renferme un fluide dans un récipient tubulaire dont la section est quelconque.

Les composantes du couple de quantité de mouvement seront

$$(9)_d \qquad \begin{cases} m_1 = \sum_1^n {}_i\, a_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_1^m {}_h\, e_h \dfrac{d\varpi_h}{dt} = \sum_1^n {}_i\, a_i \omega_i + \sum_1^m {}_h\, e_h \dfrac{d\varpi^h}{dt}, \\ m_2 = \sum_1^n {}_i\, b_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_1^m {}_h\, f_h \dfrac{d\varpi_h}{dt} = \sum_1^n {}_i\, b_i \omega_i + \sum_1^m {}_h\, f_h \dfrac{d\varpi_h}{dt}, \\ m_3 = \sum_1^n {}_i\, c_i \dfrac{dp_i}{dt} + \sum_1^m {}_h\, g_h \dfrac{d\varpi_h}{dt} = \sum_1^n {}_i\, c_i \omega_i + \sum_1^m {}_h\, g_h \dfrac{d\varpi_h}{dt} \end{cases}$$

où $a_i$, $b_i$, $c_i$, $e_h$, $f_h$, $g_h$ seront des fonctions des paramètres. On pourra aussi supposer que les moments d'inertie $A$, $B$, $C$ et les moments mixtes soient des fonctions des paramètres.

La force vive du système sera (voir article I)

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$
$$+ m_1 p + m_2 q + m_3 r + T_0.$$

3. Un déplacement virtuel du système sera déterminé par les composantes d'une rotation infiniment petite qu'on désignera par $\delta\varpi$, $\delta\chi$, $\delta\rho$ et par les differentielles $\delta p_i$ et $\delta\varpi_h$. Ecrivons le travail virtuel sous la forme

$$U = M_\xi \delta\varpi + M_\eta \delta\chi + M_\zeta \delta\rho + \sum_1^n {}_i\, P_i \delta p_i + \sum_1^m {}_h\, \Pi_h \delta\varpi_h.$$

$M_\xi$, $M_\eta$, $M_\zeta$ seront les composantes du couple de rotation; $P_i$ seront les forces correspondant aux coordonnées cycliques $p_i$ et $\Pi_h$ celles correspondant aux paramètres $\varpi_h$.

Par des formules connues on aura

$$\delta p = \frac{d}{dt}\delta\varpi + q\delta\rho - r\delta\chi,$$

$$\delta q = \frac{d}{dt}\delta\chi + r\delta\varpi - p\delta\rho,$$

$$\delta r = \frac{d}{dt}\delta\rho + p\delta\chi - q\delta\varpi.$$

En employant le principe de HAMILTON on trouve donc l'équation suivante

$$
\begin{aligned}
o = \int_{t_0}^{t_1} (\partial T + U) dt = \int_{t_0}^{t_1} \Big\{ & \frac{\partial T}{\partial p}\left(\frac{d}{dt}\partial\varpi + q\partial\rho - r\partial\chi\right) + \frac{\partial T}{\partial q}\left(\frac{d}{dt}\partial\chi + r\partial\varpi - p\partial\rho\right) \\
& + \frac{\partial T}{\partial r}\left(\frac{d}{dt}\partial\rho + p\partial\chi - q\partial\varpi\right) \\
& + \sum_1^n {}_i \left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s\, a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h\, c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt}\right)\frac{d}{dt}\partial p_i \\
& + \sum_1^m {}_h \left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_1^n {}_i\, c_{ih}\omega_i + \sum_1^m {}_k\, b_{hk}\frac{d\varpi_k}{dt}\right)\frac{d}{dt}\partial\varpi_h + \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial\varpi_h}\partial\varpi_h \\
& + M_\xi\partial\varpi + M_\eta\partial\chi + M_\zeta\partial\rho + \sum_1^n {}_i P_i\partial p_i + \sum_1^m {}_h\, \Pi_h\partial\varpi_h \Big\} dt
\end{aligned}
$$

où l'on doit supposer que $\partial\varpi, \partial\chi, \partial\rho, \partial p_i, \partial\varpi_h$ soient nuls aux temps $t_0, t_1$.

Par des intégrations par parties on trouve les équations différentielles du mouvement

$$
(10)_d \quad \begin{cases}
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial r} - r\frac{\partial T}{\partial q} = M_\xi, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial p} - p\frac{\partial T}{\partial r} = M_\eta, \\
\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + p\frac{\partial T}{\partial q} - q\frac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta, \\
\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s\, a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h\, c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt}\right) = P_i, \\
\frac{d}{dt}\left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_1^n {}_i\, c_{ih}\omega_i + \sum_1^m {}_k\, b_{hk}\frac{d\varpi_k}{dt}\right) - \frac{\partial T}{\partial\varpi_h} = \Pi_h.
\end{cases}
$$

4. Supposons maintenant que les paramètres changent si lentement que leurs dérivées par rapport à $t$ soient infiniment petites.

En les négligeant on trouvera que la force vive du mouvement interne sera

$$T_0' = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s\, a_{is}\omega_i\omega_s .$$

La force vive totale sera

$$T' = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$
$$+ \sum_{1}^{n}{}_i (a_i p + b_i q + c_i r)\omega_i + \frac{1}{2}\sum_{1}^{n}{}_i \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\omega_i\omega_s$$

et les équations différentielles du mouvement deviendront

$$(10')_d \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T'}{\partial p} + q\dfrac{\partial T'}{\partial r} - r\dfrac{\partial T'}{\partial q} = M_\xi, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T'}{\partial q} + r\dfrac{\partial T'}{\partial p} - p\dfrac{\partial T'}{\partial r} = M_\eta, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T'}{\partial r} + p\dfrac{\partial T'}{\partial q} - q\dfrac{\partial T'}{\partial p} = M_\zeta, \\ \dfrac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\omega_s\right) = P_i, \\ \dfrac{d}{dt}\left(e_h p + f_h q + g_h r + \sum_{1}^{n}{}_i c_{ih}\omega_i\right) - \dfrac{\partial T'}{\partial \varpi_h} = \Pi_h. \end{cases}$$

Pour que le mouvement interne soit cyclique même si les dérivées des intensités cycliques ne sont pas négligeables, il faut supposer que les coefficients $c_{ih}$ soient des quantités négligeables.[1]

Alors les équations précédentes deviennent

$$(10'')_d \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T'}{\partial p} + q\dfrac{\partial T'}{\partial r} - r\dfrac{\partial T'}{\partial q} = M_\xi, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T'}{\partial q} + r\dfrac{\partial T'}{\partial p} - p\dfrac{\partial T'}{\partial r} = M_\eta, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T'}{\partial r} + p\dfrac{\partial T'}{\partial q} - q\dfrac{\partial T'}{\partial p} = M_\zeta, \\ \dfrac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_{1}^{n}{}_s a_{is}\omega_s\right) = P_i, \\ \dfrac{d}{dt}(e_h p + f_h q + g_h r) - \dfrac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \Pi_h. \end{cases}$$

---

[1] Voir VOIGT, *Kompendium der theoretischen Physik.* 1er Bd., page 86.

Il est inutile d'ajouter que le système ne sera *rigoureusement cyclique* que si les paramètres seront constants.

5. En supposant que le couple de rotation soit nul ajoutons les trois premières équations $(10)_d$ après les avoir multipliées par $\frac{\partial T}{\partial p}, \frac{\partial T}{\partial q}, \frac{\partial T}{\partial r}$. On trouvera

$$\frac{\partial T}{\partial p}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} = 0$$

et en intégrant

$$(11)_d \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 = K^2.$$

Désignons par $x, y, z$ un système d'axes fixes et représentons dans la table suivante les cosinus des angles qu'ils forment avec les axes $\xi, \eta, \zeta$

| | $\xi$ | $\eta$ | $\zeta$ |
|---|---|---|---|
| $x$ | $\alpha_1$ | $\alpha_2$ | $\alpha_3$ |
| $y$ | $\beta_1$ | $\beta_2$ | $\beta_3$ |
| $z$ | $\gamma_1$ | $\gamma_2$ | $\gamma_2$ |

En employant les formules de Poisson on tire des équations $(10)_d$, si l'on suppose toujours $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$,

$$\frac{d}{dt}\left(\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0,$$

$$\frac{d}{dt}\left(\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r}\right) = 0$$

d'où par intégration

$$\alpha_1\frac{\partial T}{\partial p} + \alpha_2\frac{\partial T}{\partial q} + \alpha_3\frac{\partial T}{\partial r} = \text{const.}$$

$$\beta_1\frac{\partial T}{\partial p} + \beta_2\frac{\partial T}{\partial q} + \beta_3\frac{\partial T}{\partial r} = \text{const.}$$

$$\gamma_1\frac{\partial T}{\partial p} + \gamma_2\frac{\partial T}{\partial q} + \gamma_3\frac{\partial T}{\partial r} = \text{const.}$$

Ces intégrales sont les intégrales des aires et l'équation $(11)_d$ peut être déduite comme une conséquence d'elles.

Si le plan $xy$ est le plan invariable, alors les deux premières constantes sont nulles et la troisième est $K$; par suite il vient

$$(12)_d \qquad \gamma_1 = \frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial p}, \qquad \gamma_2 = \frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial q}, \qquad \gamma_3 = \frac{1}{K}\frac{\partial T}{\partial r}.$$

6. On tire très-facilement des équations $(10)_d$, étant $\nu \leqq n$

$$p\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial r} + \sum_1^\nu {}_i\, \omega_i \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \omega_i}$$

$$+ \sum_1^m {}_h \frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)} - \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\frac{d\varpi_h}{dt}$$

$$= M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_1^\nu {}_i P_i \omega_i + \sum_1^m {}_h \Pi_h \frac{d\varpi_h}{dt}.$$

Cette équation peut s'écrire de la manière suivante

$$\frac{d}{dt}\left(p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r} + \sum_1^\nu {}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{\partial \varpi_i} + \sum_1^m \frac{d\varpi_h}{dt}\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{\partial \varpi_h}{\partial t}\right)}\right)$$

$$-\left\{\frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \sum_1^\nu {}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{d\omega_i}{dt} + \sum_1^m {}_h\left[\frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\frac{\partial \varpi_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)}\frac{d^2\varpi_h}{dt^2}\right]\right\}$$

$$= M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_1^\nu {}_i P_i \omega_i + \sum_1^m {}_h \Pi_h \frac{d\varpi_h}{dt}.$$

Mais on a

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial p}\frac{dp}{dt} + \frac{\partial T}{\partial q}\frac{dq}{dt} + \frac{\partial T}{\partial r}\frac{dr}{dt} + \sum_1^n {}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\frac{d\omega_i}{dt} + \sum_1^m {}_h\left[\frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\frac{d\varpi_h}{dt} + \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)}\frac{d^2\varpi_h}{dt^2}\right],$$

$$2T = p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r} + \sum_1^n {}_i\, \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} + \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)}\frac{d\varpi_h}{dt}$$

donc l'équation précédente deviendra

$$\frac{d}{dt}\left(T - \sum_{\nu+1}^{n} \omega_i \frac{\partial T}{\partial \varpi_i}\right)$$

$$= M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_1^{\nu}{}_i P_i \omega_i + \sum_1^{m}{}_h \Pi_h \frac{d\varpi_h}{dt} - \sum_{\nu+1}^{n} \frac{\partial T}{\partial \omega_i} \frac{d\omega_i}{dt}.$$

Supposons que les intensités cycliques $\omega_{\nu+1}, \omega_{\nu+2}, \ldots, \omega_n$ soient constantes, alors il viendra

$$(13)_d \quad \frac{d}{dt}\left(T - \sum_{\nu+1}^{n} \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\right) = M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_1^{\nu}{}_i P_i \omega_i + \sum_1^{m}{}_h \Pi_h \frac{d\varpi_h}{dt}.$$

S'il existe une fonction des forces relatives aux paramètres[1] et qu'on la désigne par $\Phi$, on aura

$$\sum_1^{m} \Pi_h \frac{d\varpi_h}{dt} = \frac{d\Phi}{dt}$$

et par suite l'équation $(13)_d$ s'écrira

$$\frac{d}{dt}\left(T - \sum_{\nu+1}^{n}{}_i \omega_i \frac{\partial T}{d\omega_i}\right) = M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r + \sum_1^{\nu}{}_i P_i \omega_i + \frac{d\Phi}{dt}.$$

Multiplions par $dt$ et intégrons, nous trouverons

$$(14)_d \quad T - \sum_{\nu+1}^{n}{}_i \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)dt + \sum_1^{\nu}{}_i \int^t P_i \omega_i dt + \Phi + h,$$

$h$ étant un constante.

Si les mouvements internes sont *isocycliques*, c'est à dire si les intensités cycliques sont constantes, l'intégrale précédente deviendra

$$(14')_d \quad T - \sum_1^{n}{}_i \omega_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i} = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)dt + \Phi + h.$$

Si aucune des quantités $\omega_i$ n'est constante, alors

$$(14'')_d \quad T = \int^t (M_\xi p + M_\eta q + M_\zeta r)dt + \sum_1^{n}{}_i \int^t P_i \omega_i dt + \Phi + h.$$

[1] HERTZ, *Die Prixipien der Mechanik*, page 240.

**Article VI.**

1. Supposons d'abord que le système soit rigoureusement cyclique, c'est à dire que les paramètres soient constants. Supposons en outre que les intensités cycliques soient constantes.

Le mouvement sera *isocyclique,* c'est pourquoi nous revenons au cas où *les mouvements internes seront stationnaires et le corps ne change pas de forme, ni la distribution des densités change non plus.*

Alors les équations $(10'')_d$ se reduiront aux équations suivantes

$$(10''')_d \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} = M_\xi, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} = M_\eta, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta, \\ a_i\dfrac{dp}{dt} + b_i\dfrac{dq}{dt} + c_i\dfrac{dr}{dt} = P_i \end{cases}$$

et si le couple de rotation est nul les trois premières équations deviendront

$$(10^{\text{IV}})_d \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} = 0, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} = 0, \end{cases}$$

Pour les réduire à la forme qu'on a donné auparavant il suffit de prendre pour axes $\xi, \eta, \zeta$ les axes d'inertie, et alors les équations précédentes se reduisent aux équations (3).

On peut donc énoncer les résultats qu'on a obtenus dans le chapitre $2^{\text{ème}}$ de la manière suivante: *Si à l'intérieur d'un corps qui n'est soumis à aucun couple de rotation existent des mouvements isocycliques (les paramètres étant constants) alors les composantes de la rotation sont des fonctions elliptiques du temps, et les cosinus des angles que les axes d'inertie du système forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps.*

2. Remarquons que $T$ est une fonction de $2^{\text{ème}}$ degré, par suite si nous posons

$$f_1 = \frac{1}{2\sqrt{H}}\left[\left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{H}\,[(Ap - Fq - Er + m_1)^2(-Fp + Bq - Dr + m_2)^2(-Ep - Dq + Cr + m_3)^2],$$

$$f_2 = \frac{1}{2\sqrt{H}}\left[p\frac{\partial T}{\partial p} + q\frac{\partial T}{\partial q} + r\frac{\partial T}{\partial r} - T\right]$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{H}}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq),$$

$H$ étant donné par la formule

$$H = \begin{vmatrix} A, & -F, & -E \\ -F, & B, & -D \\ -E, & -D, & C \end{vmatrix}$$

les équations $(10^{\text{IV}})_d$ deviennent (voir article V du chapitre I)

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}$$

et l'on peut obtenir l'intégration (voir chapitre II, article II) sans déterminer d'avance les axes d'inertie du corps. L'équation de $4^{\text{ème}}$ degré dont dépend la solution sera

$$0 = \begin{vmatrix} E^2 + F^2 + A(A-\lambda), & ED - FA - F(B-\lambda), & FD - EA - E(C-\lambda), & Am_1 - Fm_2 - Em_3 \\ ED - FB - F(A-\lambda), & F^2 + D^2 + B(B-\lambda), & FE - DB - D(C-\lambda), & -Fm_1 + Bm_2 - Dm_3 \\ FD - EC - E(A-\lambda), & FE - DC - D(B-\lambda), & E^2 + D^2 + C(C-\lambda), & -Em_1 - Dm_2 + Cm_3 \\ Am_1 - Fm_2 - Em_3, & -Fm_1 + Bm_2 - Dm_3, & -Em_1 - Dm_2 + Cm_3, & 2\lambda h - K_1 \end{vmatrix}$$

où l'on a (voir $(14')_d$)

$$h = \text{const.} = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq) = T - \sum_1^n {}_i\,\omega_i\frac{\partial T}{\partial \omega_i},$$

$$K_1 = K^2 - m_1^2 - m_2^2 - m_3^2,$$

étant (voir $(11)_d$)

$$K^2 = \text{const.} + (Ap - Fq - Er + m_1)^2 + (Bq - Fp - Dr + m_2)^2$$
$$+ (-Ep - Dq + Cr + m_3)^2 = \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2.$$

3. Les formules $(10''')_d$ font connaître un autre élément très-important dans la question. En effet la dernière de ces formules nous donne l'expression des forces qui sont capables de maintenir stationnaire le mouvement. On tire de ces formules la propriété suivante qui complète la proposition que nous avons énoncée à la fin du premier paragraphe:

*Les forces nécessaires pour maintenir stationnaire le mouvement sont des fonctions elliptiques du temps.*

Pour le calcul de ces forces nous renvoyons au § 4 de l'article IX (voir $(23)_d$). En attendant nous pouvons nous servir du résultat que nous venons de trouver pour chercher dans quels cas les mouvements internes pourront se maintenir stationnaires sans que l'intervention d'aucune force ne soit nécessaire. Nous emploierons les résultats que nous avons trouvés à l'article II et nous les compléterons. Rappelons en effet que les conditions que nous avons données dans cet article, par rapport à la question que nous nous posons, sont des conditions nécessaires et ne sont pas suffisantes (voir § 6, article II).

On tire de la dernière des formules $(10''')_d$ que les forces internes seront nulles lorsque

$$(14^{\text{v}})_d \qquad a_i p + b_i q + c_i r = \text{const.} \qquad (i=1,2,..,n)$$

Remarquons d'abord que ces conditions sont vérifiées lorsque le mouvement de rotation est permanent. On peut donc dire:

*Si le mouvement de rotation est permanent, il ne faut pas de forces pour maintenir isocycliques les mouvements internes.*

Lorsque le mouvement de rotation n'est pas permanent, rapportons nous aux axes d'inertie.

Si les forces ne doivent pas exister il faudra que la force vive soit constante, c'est pourquoi on aura (voir article II, § 1)

$$m_1 p + m_2 q + m_3 r = \text{const.}$$

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

sans que $p, q, r$ soient des quantités constantes.

Donc pour que les conditions $(14^{\text{v}})_d$ soient vérifiées il faut que

$$\frac{a_i}{m_1} = \frac{b_i}{m_2} = \frac{c_i}{m_3} = \text{const.}$$

Nous avons donné (article II, § 5) les conditions que $m_1, m_2, m_3$ doivent vérifier pour que la force vive soit constante lorsque la rotation n'est pas permanente, on aura donc tout de suite les conditions nécessaires et suffisantes que nous cherchons.

En rappelant la proposition que nous avons donnée au § V, article II, et le théorème que nous avons énoncé tout à l'heure on aura:

*Les forces étant nulles, le mouvement interne sera isocyclique dans les cas suivants:*

1° *lorsque le mouvement de rotation est permanent,*

2° *lorsque*

$$a_i = \theta_i \sqrt{A(A-B)}, \qquad b_i = 0, \qquad c_i = \pm\, \theta_i \sqrt{C(B-C)}$$

*les quantités $\theta_i$ étant des constantes et les conditions initiales du mouvement étant telles que*

$$\sqrt{A(A-B)}\,p \pm \sqrt{C(B-C)}\,r + (A-C) \sum_1^n {}_i \theta_i \omega_i = 0,$$

3° *lorsqu'on aura*

$$A = B, \qquad a_i = b_i = 0,$$

*le mouvement initial de rotation étant arbitraire.*

## Article VII.

1. Nous allons examiner dans cet article un cas important qui peut se présenter. C'est le cas où les forces correspondant aux coordonnées cycliques sont nulles.

Si $P_1 = P_2 = \ldots = P_n = 0$, on aura

$$\frac{d}{dt}\left(a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt}\right) = 0$$

et en intégrant

$$a_i p + b_i q + c_i r + \sum_1^n {}_s a_{is}\omega_s + \sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt} = K_i,$$

$K_i$ étant une quantité constante.

2. En employant les intégrales qu'on vient de trouver on peut éliminer les intensités cycliques. En effet, en ayant égard à l'égalité $a_{is} = a_{si}$, calculons le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix}$$

et désignons par $A_{is}$ le rapport entre l'élément réciproque de $a_{is}$ et le déterminant.

On aura, en posant $\sum_1^m {}_h c_{ih}\frac{d\varpi_h}{dt} = v_i$,

$$(16)_d \qquad \sum_1^n {}_s a_{is}\omega_s = K_i - v_i - a_i p - b_i q - c_i r$$

d'où

$$(17)_d \qquad \omega_i = \sum_1^n {}_s A_{is}(K_s - v_s) - p\Sigma_s A_{is}a_s - q\Sigma_s A_{is}b_s - r\Sigma_s A_{is}c_s.$$

Ou si

$$\tau = \frac{1}{2}\sum_1^m {}_h \sum_1^m {}_k b_{hk}\frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d\varpi_k}{dt}$$

on a (voir article V, § 2)

$$T_0 = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s a_{is}\omega_i\omega_s + \sum_1^n {}_i v_i\omega_i + \tau = \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \omega_i\left(\sum_1^n {}_s a_{is}\omega_s + 2v_i\right) + \tau$$

$$= \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \omega_i(K_i + v_i - a_i p - b_i q - c_i r) + \tau.$$

Et en remplaçant $\omega_i$ par l'expression $(17)_d$ on trouve

$$T_0 = \frac{1}{2}(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq) - p\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}a_iK_s$$

$$-q\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}b_iK_s - r\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}c_iK_s + \frac{1}{2}\Sigma_i\Sigma_s A_{is}K_iK_s - \Sigma_i\Sigma_s A_{is}v_iv_s + \tau,$$

ayant posé pour simplifier

$$a = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}a_ia_s, \qquad b = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}b_ib_s, \qquad c = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}c_ic_s,$$

$$d = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}b_ic_s, \qquad e = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}c_ia_s, \qquad f = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}a_ib_s.$$

Si dans les formules $(9)_d$ on remplace $\omega_1 \dots \omega_n$ par les expressions $(17)_d$ on a

$$m_1 = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}(K_i - v_i)a_s - ap - fq - er + \sum_1^m{}_h e_h\frac{d\varpi_h}{dt},$$

$$m_2 = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}(K_i - v_i)b_s - fp - bq - dr + \sum_1^m{}_h f_h\frac{d\varpi_h}{dt},$$

$$m_3 = \sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}(K_i - v_i)c_s - ep - dq - cr + \sum_1^m{}_h g_h\frac{d\varpi_h}{dt},$$

d'où l'on tire

$$m_1p + m_2q + m_3r = -(ap^2 + bq^2 + cr^2 + 2dqr + 2erp + 2fpq)$$

$$+ p\left[\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}(K_i - v_i)a_s + \sum_1^m{}_h e_h\frac{d\varpi_h}{dt}\right]$$

$$+ q\left[\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}(K_i - v_i)b_s + \sum_1^m{}_h f_h\frac{d\varpi_h}{dt}\right]$$

$$+ r\left[\sum_1^n{}_i\sum_1^n{}_s A_{is}(K_i - v_i)c_s + \sum_1^m{}_h g_h\frac{d\varpi_h}{dt}\right].$$

On peut donc calculer l'expression de la force vive du système qu'on obtient par l'élimination des intensités cycliques, savoir

$$(1'')_d \quad (T) = \frac{1}{2}\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\}$$
$$+ p\sum_1^m {}_h e'_h \frac{d\varpi_h}{dt} + q\sum_1^m {}_h f'_h \frac{d\varpi_h}{dt} + r\sum_1^m {}_h g'_h \frac{d\varpi_h}{dt}$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} K_i K_s + \frac{1}{2}\sum_1^m {}_h \sum_1^m {}_k b'_{kh} \frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d\varpi_k}{dt},$$

ayant posé

$$e'_h = e_h - \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} a_s c_{ih}, \qquad f'_h = f_h - \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} b_s c_{ih},$$
$$g'_h = g_h - \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} c_s c_{ih},$$
$$b'_{hk} = b_{hk} - \sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} c_{ih} c_{sk}.$$

Nous avons écrit $(T)$ au lieu de $T$ pour désigner l'élimination qu'on vient de faire.

3. Pour transformer les équations $(10)_d$ par l'élimination des quantités $\omega_i$, remarquons que l'on a

$$(18)_d \qquad \delta T = \frac{\partial T}{\partial p}\delta p + \frac{\partial T}{\partial q}\delta q + \frac{\partial T}{\partial r}\delta r + \sum_1^n {}_i \frac{\partial T}{\partial \omega_i}\delta\omega_i + \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial \varpi_h}\delta\varpi_h$$
$$+ \sum_1^m {}_h \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)}\delta\frac{d\varpi_h}{dt}.$$

A cause des équations $(15)_d$ on peut écrire

$$\frac{\partial T}{\partial \omega_i} = K_i$$

et des équations $(17)_d$ on déduit

$$\delta\omega_i = \sum_1^m {}_h \frac{\partial\left(\sum_1^n {}_s A_{is}(K_s - v_s) - p\Sigma_s A_{is} a_s - q\,\Sigma_s A_{is} b_s - r\,\Sigma_s A_{is} c_s\right)}{\partial\varpi_h}\delta\varpi_h$$

$$-\sum_1^m {}_h \delta\frac{d\varpi_h}{dt}\sum_1^n {}_s A_{is} c_{ih} - \Sigma_s A_{is} a_s \delta p - \Sigma_s A_{is} b_s \delta q - \Sigma_s A_{is} c_s \delta r.$$

Par suite en posant

$$\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i a_s = l_1, \qquad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i b_s = l_2, \qquad \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i c_s = l_3,$$

$$\sum_1^n {}_i \sum_1^n {}_s A_{is} c_{ih} K_s = s_h$$

la formule $(18)_d$ s'écrira

$$\delta T = \left(\frac{\partial T}{\partial p} - l_1\right)\delta p + \left(\frac{\partial T}{\partial q} - l_2\right)\delta q + \left(\frac{\partial T}{\partial r} - l_3\right)\delta r + \sum_1^m {}_h \left(\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)} - s_h\right)\delta\frac{d\varpi_h}{dt}$$

$$+\sum_1^m {}_h \frac{\partial}{\partial\varpi_h}\left[T + \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s - \sum_1^m {}_h s_h \frac{d\varpi_h}{dt} - l_1 p - l_2 q - l_3 r\right]\delta\varpi_h.$$

Mais

$$\delta(T) = \frac{\partial(T)}{\partial p}\delta p + \frac{\partial(T)}{\partial q}\delta q + \frac{\partial(T)}{\partial r}\delta r + \sum_1^m {}_h \frac{\partial(T)}{\partial\varpi_h}\delta\varpi_h + \sum_1^m {}_h \frac{\partial(T)}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)}\delta\frac{d\varpi_h}{dt};$$

en conséquence si nous comparons les dernières formules nous aurons

$$(19)_d \quad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial(T)}{\partial p} + l_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial(T)}{\partial q} + l_2, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial(T)}{\partial r} + l_3, \\ &\frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)} = \frac{\partial(T)}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)} + s_h, \\ &\frac{\partial T}{\partial\varpi_h} = \frac{\partial\left[(T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r + \sum_1^m {}_h s_h \frac{d\varpi_h}{dt} - \Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s\right]}{\partial\varpi_h}. \end{aligned}\right.$$

On peut donner à ces équations une expression plus simple. A cet effet posons

$$\theta = (T) + l_1 p + l_2 q + l_3 r + \sum_1^m{}_h s_h \frac{d\varpi_h}{dt} - \sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s A_{is} K_i K_s$$

ou bien

$$(20)_d \qquad \theta = \frac{1}{2}\Big\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\Big\}$$
$$+ p\left(\sum_1^m{}_h e'_h \frac{d\varpi_h}{dt} + l_1\right) + q\left(\sum_1^m{}_h f'_h \frac{d\varpi_h}{dt} + l_2\right) + r\left(\sum_1^m{}_h g'_h \frac{d\varpi_h}{dt} + l_3\right)$$
$$+ \frac{1}{2}\sum_1^m{}_h \sum_1^m{}_k b'_{hk} \frac{d\varpi_h}{dt}\frac{d\varpi_k}{dt} + \sum_1^m{}_h s_h \frac{d\varpi_h}{dt} - \frac{1}{2}\sum_1^n{}_i \sum_1^n{}_s A_{is} K_i K_s .$$

On aura alors

$$\frac{\partial T}{\partial p} = \frac{\partial \theta}{\partial p}, \qquad \frac{\partial T}{\partial q} = \frac{\partial \theta}{\partial q}, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial \theta}{\partial r},$$

$$\frac{\partial T}{\partial \varpi_h} = \frac{\partial \theta}{\partial \varpi_h}, \qquad \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)} = \frac{\partial T}{\partial\left(\frac{d\varpi_h}{dt}\right)} = e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m{}_k b'_{hk}\frac{d\varpi_k}{dt} + s_h$$

et par suite les équations $(10)_d$ peuvent s'écrire

$$(21)_d \qquad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\theta}{\partial p} + q\dfrac{\partial\theta}{\partial r} - r\dfrac{\partial\theta}{\partial q} = M_\xi, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\theta}{\partial q} + r\dfrac{\partial\theta}{\partial p} - p\dfrac{\partial\theta}{\partial r} = M_\eta, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\theta}{\partial r} + p\dfrac{\partial\theta}{\partial q} - q\dfrac{\partial\theta}{\partial p} = M_\zeta, \\[2ex] \dfrac{d}{dt}\left(e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m{}_k b'_{hk}\dfrac{d\varpi_k}{dt} + s_h\right) - \dfrac{\partial\theta}{\partial\varpi_h} = \Pi_h . \end{cases}$$

## Article VIII.

1. Supposons que les paramètres du système cyclique soient constants. Alors les équations qu'on vient de trouver se réduisent aux trois équations

$$(21')_d \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial p} + q\frac{\partial\theta}{\partial r} - r\frac{\partial\theta}{\partial q} = M_\xi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial q} + r\frac{\partial\theta}{\partial p} - p\frac{\partial\theta}{\partial r} = M_\eta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial\theta}{\partial r} + p\frac{\partial\theta}{\partial q} - q\frac{\partial\theta}{\partial p} = M_\zeta \end{cases}$$

dans lesquelles on aura

$$(20')_d \qquad \theta = \frac{1}{2}\Big\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\Big\} + l_1 p + l_2 q + l_3 r.$$

Les coefficients de tous les termes de cette expression sont constants, par suite les équations $(21')_d$ correspondent à la rotation d'un système dans lequel existent des mouvements stationnaires, en supposant que les moments d'inertie par rapport aux axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ soient

$$A-a\,,\quad B-b\,,\quad C-c,$$

que les moments mixtes d'inertie par rapport aux couples d'axes $\eta$, $\zeta$; $\zeta$, $\xi$; $\xi$, $\eta$ soient

$$D+d\,,\quad E+e\,,\quad F+f,$$

et enfin que les composantes du couple de quantité de mouvement du mouvement interne soient

$$l_1\,,\ l_2\,,\ l_3. \qquad \text{(Voir article VI.)}$$

On tire de là le théorème suivant:

*Soit un corps dont la figure reste invariable, dans lequel la distribution des densités n'est pas alterée, à l'intérieur duquel existe un mouvement polycyclique laissant les paramètres constants et sur les coordonnées cycliques*

*duquel n'agit aucune force; sous l'action d'un couple donné, il tournera autour du centre de gravité comme un autre corps dans lequel existe un mouvement stationnaire, qui est sollicité par le même couple moteur; les intensités cycliques dépendront à chaque instant de la rotation du corps.*

2. Remarquons que la forme quadratique

$$(20'')_d \qquad \frac{1}{2}\Big\{(A-a)p^2+(B-b)q^2+(C-c)r^2-2(D+d)qr$$
$$-2(E+e)rp-2(F+f)pq\Big\}$$

est une forme définie positive. Cela dépend de l'expression $(1'')_d$ trouvée pour $(T)$ qui étant celle de la force vive doit être toujours positive. Mais on ne peut pas démontrer que $A-a$, $B-b$, $C-c$, vérifient les conditions

$$(B-b)+(C-c)>A-a,$$
$$(C-c)+(A-a)>B-b,$$
$$(A-a)+(B-b)>C-c,$$

auxquelles doivent satisfaire les moments d'inertie d'un corps réel dont la densité est toujours positive. C'est pourquoi dans le théorème précédent lorsqu'on parle du corps qui tourne de la même manière que le corps donné, il faut envisager un corps idéal dont la densité peut devenir aussi négative. Du point de vue analytique et cinématique il n'y a aucune différence entre le mouvement de ce corps et celui d'un corps réel, puisque la forme quadratique $(20'')_d$ est une forme quadratique définie.

3. Le théorème qu'on a donné à la fin du § 1 ramène la recherche du mouvement d'un corps dans lequel existent des systèmes polycycliques, et qui n'est soumis à aucun couple extérieur, au problème qui a été traité auparavant, et l'intégration, dans ce cas plus général, s'effectuera encore à l'aide des fonctions elliptiques. (Voir le chapitre II.)

On pourra énoncer la proposition suivante:

*Les composantes de la rotation et les intensités cycliques d'un système, dans lequel existent des systèmes polycycliques, dont la figure et la distribution des densités n'est pas altérée, et qui n'est soumis à aucune force extérieure,*

*sont des fonctions elliptiques du temps; les cosinus des angles que les axes d'inertie forment avec des axes fixes sont des fonctions uniformes du temps.*

4. Si l'on voulait effectuer la solution de la question en la ramenant à celle du mouvement d'un corps dans lequel existent des mouvements stationnaires, on pourrait d'abord réduire les équations à la forme (3) et après faire l'intégration par les méthodes qu'on a données auparavant. Mais il est évident qu'on peut atteindre le but d'une manière directe beaucoup plus simple. Il suffit pour cela d'appliquer les propositions de l'article V du 1er chapitre, §§ 3, 4, comme nous avons déjà montré dans l'article VI. En effet, lorsque $M_\xi = M_\eta = M_\zeta = 0$ on peut ramener les équations différentielles $(21)_a$ au type $(12)_a$, puisque $\theta$ est une fonction de 2d degré. Le Hessien de la fonction $\theta$ sera

$$H = \begin{vmatrix} A-a, & -(F+f), & -(E+e) \\ -(F+f), & B-b, & -(D+d) \\ -(E+e), & -(D+d), & C-c \end{vmatrix}$$

et on calculera tout de suite les fonctions $f_1$ et $f_2$ par les formules

$$\begin{aligned} f'_1 = \frac{1}{2\sqrt{H}}\Big\{&[(A-a)p-(F+f)q-(E+e)r+l_1]^2 \\ &+[-(F+f)p+(B-b)q-(D+d)r+l_2]^2 \\ &+[-(E+e)p-(D+d)q+(C-c)r+l_3]^2\Big\}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f'_2 = \frac{1}{2\sqrt{H}}\Big\{&(A-a)p^2+(B-b)q^2+(C-c)r^2-2(D+d)qr \\ &-2(E+e)rp-2(F+f)pq\Big\}, \end{aligned}$$

de sorte qu'on aura

$$\frac{dp}{dt} = \frac{d(f'_1, f'_2)}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f'_1, f'_2)}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f'_1, f'_2)}{d(p, q)}.$$

5. On peut intégrer directement ces équations par la méthode qu'on a donnée dans le 2ème chapitre à l'article II. Cette intégration dépendra de la résolution d'une équation de 4ème degré qu'on écrira tres-aisément en partant de l'équation $(12)_b$ du même article. (Comparez article VI, § 2.)

Les expressions des composantes de la rotation et celles des intensités cycliques seront les suivantes

$$(22)_d \quad \begin{cases} p = \dfrac{N_1^{(1)}\sigma_1 u + N_1^{(2)}\sigma_2 u + N_1^{(3)}\sigma_3 u + N_1^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \\[2ex] q = \dfrac{N_2^{(1)}\sigma_1 u + N_2^{(2)}\sigma_2 u + N_2^{(3)}\sigma_3 u + N_2^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \\[2ex] r = \dfrac{N_3^{(1)}\sigma_1 u + N_3^{(2)}\sigma_2 u + N_3^{(3)}\sigma_3 u + N_3^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \\[2ex] \omega_i = \dfrac{L_i^{(1)}\sigma_1 u + L_i^{(2)}\sigma_2 u + L_i^{(3)}\sigma_3 u + L_i^{(4)}\sigma u}{M^{(1)}\sigma_1 u + M^{(2)}\sigma_2 u + M^{(3)}\sigma_3 u + M^{(4)}\sigma u}, \end{cases}$$

où $L_i^{(h)}$, $M_i^{(h)}$, $N_i^{(h)}$ sont des quantités constantes.

Si nous employons les quantités $\alpha_{ir}^{(h)}$ du 2$^{me}$ chapitre, article II, on aura

$$(23)_d \quad \begin{cases} N_i^{(h)} = M^{(h)} \dfrac{a_{i3}^{(h)}}{a_{44}^{(h)}}, \\[2ex] L_i^{(h)} = M^{(h)} \dfrac{\Sigma_s(- a_s a_{14}^{(h)} - b_s a_{24}^{(h)} - c_s a_{34}^{(h)} + K_s a_{44}^{(h)}) A_{is}}{a_{44}^{(h)}}. \end{cases}$$

La relation qui subsiste entre $t$ et $u$ sera l'équation linéaire (voir $(23)_b$)

$$(24)_d \quad u = \sqrt{\frac{(\lambda_2 - \lambda_4)(\lambda_1 - \lambda_3)}{(e_1 - e_3)H}}\,(t - t_0),$$

$t_0$ étant une constante arbitraire et $\lambda_1$, $\lambda_2$, $\lambda_3$, $\lambda_4$ les racines de l'équation du 4$^{ème}$ degré.

Pour calculer les cosinus des angles que les axes $\xi$, $\eta$, $\zeta$ forment avec les axes fixes, il faudra d'abord déterminer $\gamma_1$, $\gamma_2$, $\gamma_3$. En employant les formules $(12)_d$ on aura

$$(25)_d \quad \begin{cases} \gamma_1 = \dfrac{1}{K}[\quad (A - a)p - (F + f)q - (E + e)r + l_1], \\[2ex] \gamma_2 = \dfrac{1}{K}[- (F + f)p + (B - b)q - (D + d)r + l_2], \\[2ex] \gamma_3 = \dfrac{1}{K}[- (E + e)p - (D + d)q + (C - c)r + l_3]. \end{cases}$$

Par la méthode qu'on a donnée aux articles IV, V, VI du 2ème chapitre on pourra obtenir l'expression des autres cosinus.

6. Dans le cas que nous venons de discuter le système est abandonné à son inertie, car on a supposé toutes les forces nulles, soit le couple de rotation, soient les forces relatives aux coordonnées cycliques. On peut désigner ce cas en disant qu'il correspond à un mouvement *adiabatique* du système. Donc *dans un mouvement adiabatique* (*les paramètres étant constants*), *les composantes de la rotation et les intensités cycliques sont des fonctions elliptiques du temps.*

Il faut remarquer cependant que *le mouvement interne n'est pas adiabatique.* En effet calculons les *moments cycliques.* On aura

$$q_i = \frac{\partial T_0}{\partial \omega_i} = \sum_1^n {}_s a_{is} \omega_s = K_i - a_i p - b_i q - c_i r,$$

On voit qu'ils ne sont pas constants, mais qu'il sont des fonctions linéaires des composantes de la rotation du système.[1]

## Article IX.

1. Les résultats qu'on a trouvés aux articles VI, VIII prouvent que les paramètres étant constants, et le mouvement du système étant isocyclique ou adiabatique, la solution peut être obtenue par les fonctions elliptiques.

Nous allons maintenant discuter un cas plus général, dont ceux qu'on a envisagés sont des cas particuliers, et dans lequel la solution peut s'obtenir de la même manière.

2. Supposons que quelques-unes seulement des forces relatives aux coordonnées cycliques soient nulles. Alors on voit bien aisément qu'on pourra éliminer dans les équations du mouvement autant d'intensités cycliques, qu'on a de forces nulles.

Pour obtenir ce résultat il n'est pas nécessaire de faire de nouveaux calculs. On peut se servir des formules que nous avons trouvées à l'ar-

[1] Voir HERTZ: *Die Prinzipien der Mechanik,* page 239.

ticle VII. Il suffit pour cela de supposer que quelques-unes des coordonnées $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ ne paraissent pas explicitement dans les formules $(10)_d$. Alors elles deviennent des coordonnées cycliques et les paramètres sont les coordonnées résidues.

Donc les formules qu'on trouve par l'élimination sont les équations $(21)_d$ dans lesquelles on devra retrancher les termes $\frac{\partial \theta}{\partial \varpi_h}$ relatifs à celles des coordonnées $\varpi_h$ qu'on a supposées être des coordonnées cycliques.

3. Appliquons ce résultat au cas où le système est rigoureusement cyclique. Alors on pourra supposer que toutes les coordonnées $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ soient des coordonnées cycliques. Désignons leurs dérivées $\frac{d\varpi_1}{dt}, \frac{d\varpi_2}{dt}, \ldots, \frac{d\varpi_m}{dt}$ qui sont des intensités cycliques, par $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_m$, et posons $\Pi_h = P'_h$. Les équations $(21)_d$ pourront s'écrire

$$(21'')_d \qquad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta'}{\partial p} + q\frac{\partial \theta'}{\partial r} - r\frac{\partial \theta'}{\partial q} = M_\xi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta'}{\partial q} + r\frac{\partial \theta'}{\partial p} - p\frac{\partial \theta'}{\partial r} = M_\eta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta'}{\partial r} + p\frac{\partial \theta'}{\partial q} - q\frac{\partial \theta'}{\partial p} = M_\zeta, \\ \frac{d}{dt}\left(e'_h p + f'_h q + g'_h r + \sum_1^m {}_k b'_{hk}\omega'_k\right) = P'_h, \end{cases}$$

où

$$(20'')_d \quad \theta' = \frac{1}{2}\Big\{(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\Big\}$$
$$+ p\left(\sum_1^m {}_h e'_h\omega'_h + l_1\right) + q\left(\sum_1^m {}_h f'_h\omega'_h + l_2\right) + r\left(\sum_1^m {}_h g'_h\omega'_h + l_3\right) + \frac{1}{2}\sum_1^m {}_h\sum_1^m {}_k b'_{hk}\omega'_h\omega'_k.$$

On a supprimé dans l'expression de $\theta'$ les termes $\sum_1^m {}_h s_h\frac{d\varpi_h}{dt}$ et les termes $-\frac{1}{2}\sum_1^m {}_i\sum_1^m {}_s A_{is}K_iK_s$ qui paraissent dans l'expression de $\theta$, mais qui disparaissent dans les calculs des dérivées.

4. Soient maintenant les intensités cycliques $\omega_1', \omega_2', \ldots, \omega_m'$ des quantités constantes. Dans ce cas les coefficients de $p, q, r$ dans tous les termes de $\theta'$ sont des quantités constantes. Par suite *le théorème énoncé au* 1[er] *§ de l'article VIII s'étend au cas où quelques coordonnées cycliques ne sont pas soumises à des forces et les intensités cycliques correspondantes aux autres coordonnées cycliques sont constantes.*

Si le couple de rotation est nul, alors l'intégration des équations $(21'')_d$ pourra s'effectuer par les fonctions elliptiques.

En effet en rappelant les résultats obtenus à l'article V du 1[er] chapitre on pourra écrire les équations (21'') sous la forme (comparez le § 4 de l'article VII)

$$(22)_d \qquad \frac{dp}{dt} = \frac{d(f_1'', f_1')}{d(q, r)}, \qquad \frac{dq}{dt} = \frac{d(f_1'', f_2')}{d(r, p)}, \qquad \frac{dr}{dt} = \frac{d(f_1'', f_2')}{d(p, q)},$$

$f_1''$ et $f_2'$ étant donnés par les formules

$$\begin{aligned} f_1'' = \frac{1}{2\sqrt{H}}\Bigg\{ & \Big[(A-a)p - (F+f)q - (E+e)r + \sum_1^m e_h'\omega_h' + l_1\Big]^2 \\ & + \Big[-(F+f)p + (B-b)q - (D+d)r + \sum_1^m f_h'\omega_h' + l_2\Big]^2 \\ & + \Big[-(E+e)p - (D+d)q + (C-c)r + \sum_1^m g_h'\omega_h' + l_3\Big]^2\Bigg\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_2' = \frac{1}{2\sqrt{H}}\Big\{ & (A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr \\ & - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq\Big\}, \end{aligned}$$

$$H = \begin{vmatrix} A-a, & -(F+f), & -(E+e) \\ -(F+f), & B-b, & -(D+d) \\ -(E+e), & -(D+d), & C-c \end{vmatrix}.$$

Les expressions des fonctions inconnues $p, q, r; \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sont les mêmes que celles données dans l'article VIII au § 5.

Pour obtenir les expressions des forces $P_h'$ c'est à dire des forces qui sont capables de maintenir constantes les intensités cycliques $\omega_1'$,

$\omega'_2, \ldots, \omega'_m$, il suffira de remarquer que la dernière des équations $(21'')_d$ s'écrit

$$P'_h = e'_h \frac{dp}{dt} + f'_h \frac{dq}{dt} + g'_h \frac{dr}{dt}$$

et à cause des équations $(22)_d$

$$P'_h = e'_h \frac{d(f_1, f_2)}{d(q, r)} + f'_h \frac{d(f_1, f_2)}{d(r, p)} + g'_h \frac{d(f_1, f_2)}{d(p, q)}.$$

Par suite en posant

$$f_0^{(h)} = e'_h p + f'_h q + g'_h r$$

on aura

$$(23)_d \qquad P'_h = \frac{d(f_0^{(h)}, f_1, f_2)}{d(p, q, r)}.$$

On tire de là que les forces $P'_h$ seront représentées par des fonctions elliptiques du temps.

## Article X.

1. Nous avons donné à l'article V les formules $(10)_d$ dans lesquelles on a introduit les coordonnées cycliques et les paramètres.

Les paramètres que nous avons considérés sont des quantités indépendantes, mais on pourrait très-bien envisager des paramètres liés par des relations correspondant à des liaisons. Si les paramètres étaient liés par les relations indépendantes

$$f_1(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m) = 0, \quad f_2(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m) = 0, \ldots, f_g(\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m) = 0,$$

il faudrait modifier les équations $(10)_d$ en ajoutant au second membre de la dernière d'elles les termes

$$\sum_1^g {}_r \lambda_r \frac{\partial f_r}{\partial \varpi_h}.$$

2. Nous n'allons pas approfondir le résultat qu'on trouverait de cette manière. Plutôt comme complément des formules que nous avons

données, nous voulons envisager le cas du mouvement d'un corps solide et d'un corps liquide homogène qu'on peut supposer remplir une cavité du premier corps.

$S$ étant l'espace occupé par le liquide, la force vive du système sera, en se rapportant à des axes liés invariablement au corps solide (voir article V)

$$T = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$
$$+ \frac{1}{2}\int_S \left[\left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2 + \left(\frac{d\zeta}{dt}\right)^2\right]\rho dS + p\int_S \left(\eta\frac{d\zeta}{dt} - \zeta\frac{d\eta}{dt}\right)\rho dS$$
$$+ q\int_S \left(\zeta\frac{d\xi}{dt} - \xi\frac{d\zeta}{dt}\right)\rho dS + r\int_S \left(\xi\frac{d\eta}{dt} - \eta\frac{d\xi}{dt}\right)\rho dS,$$

où $\xi, \eta, \zeta$ sont les coordonnées des points du fluide et $\rho$ sa densité.

Pour vérifier l'équation de continuité il faudra prendre

$$\frac{\partial\delta\xi}{\partial\xi} + \frac{\partial\delta\eta}{\partial\eta} + \frac{\partial\delta\zeta}{\partial\zeta} = 0.$$

Par suite, en employant le principe de HAMILTON, en trouvera les équations

$$(24)_d \quad \begin{cases} \dfrac{d^2\xi}{dt^2} + 2\left(q\dfrac{d\zeta}{dt} - r\dfrac{d\eta}{dt}\right) + \zeta\dfrac{dq}{dt} - \eta\dfrac{dr}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial\xi}\left(\dfrac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ \dfrac{d^2\eta}{dt^2} + 2\left(r\dfrac{d\xi}{dt} - p\dfrac{d\zeta}{dt}\right) + \xi\dfrac{dr}{dt} - \zeta\dfrac{dp}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial\eta}\left(\dfrac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ \dfrac{d^2\zeta}{dt^2} + 2\left(p\dfrac{d\eta}{dt} - q\dfrac{d\xi}{dt}\right) + \eta\dfrac{dp}{dt} - \xi\dfrac{dq}{dt} + \dfrac{\partial}{\partial\zeta}\left(\dfrac{P}{\rho} - V\right) = 0, \end{cases}$$

$$(24')_d \quad \begin{cases} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial p} + q\dfrac{\partial T}{\partial r} - r\dfrac{\partial T}{\partial q} = M_\xi, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial q} + r\dfrac{\partial T}{\partial p} - p\dfrac{\partial T}{\partial r} = M_\eta. \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial T}{\partial r} + p\dfrac{\partial T}{\partial q} - q\dfrac{\partial T}{\partial p} = M_\zeta, \end{cases}$$

$V$ étant la fonction potentielle des forces agissant sur le fluide et $M_\xi$, $M_\eta$, $M_\zeta$ les composantes du couple de rotation. Si nous posons

$$u = \frac{d\xi}{dt}, \qquad v = \frac{d\eta}{dt}, \qquad w = \frac{d\zeta}{dt}$$

et si nous désignons par le symbole $\frac{\partial}{\partial t}$ la dérivée partielle par rapport à $t$ d'une quantité en la regardant comme une fonction de $\xi, \eta, \zeta, t$, les équations précédentes deviendront

$$(25)_d \quad \begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial \xi} + v\frac{\partial u}{\partial \eta} + w\frac{\partial u}{\partial \zeta} + 2(qw - rv) \\ \qquad + \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} + \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial \xi} + v\frac{\partial v}{\partial \eta} + w\frac{\partial v}{\partial \zeta} + 2(ru - pw) \\ \qquad + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} + \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} + u\frac{\partial w}{\partial \xi} + v\frac{\partial w}{\partial \eta} + w\frac{\partial w}{\partial \zeta} + 2(pv - qu) \\ \qquad + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} + \frac{\partial}{\partial \zeta}\left(\frac{P}{\rho} - V\right) = 0, \end{cases}$$

$$(25')_d \quad \begin{cases} \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial p} + q\frac{\partial \theta}{\partial r} - r\frac{\partial \theta}{\partial q} = M_\xi, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial q} + r\frac{\partial \theta}{\partial p} - p\frac{\partial \theta}{\partial r} = M_\eta, \\ \frac{d}{dt}\frac{\partial \theta}{\partial r} + p\frac{\partial \theta}{\partial q} - q\frac{\partial \theta}{\partial p} = M_\zeta, \end{cases}$$

où

$$\theta = \frac{1}{2}(Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 - 2Dqr - 2Erp - 2Fpq)$$
$$+ p\int_S(\eta w - \zeta v)\rho dS + q\int_S(\zeta u - \xi w)\rho dS + r\int_S(\xi v - \eta u)\rho dS.$$

A ces équations il faut ajouter l'équation de continuité

$$(26)_d \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial v}{\partial \eta} + \frac{\partial w}{\partial \zeta} = 0$$

et l'équation au contour

$$(27)_d \qquad u\cos n\xi + v\cos n\eta + w\cos n\zeta = 0,$$

$n$ étant la normale à la paroi qui limite l'espace occupé par le fluide.

3. Envisageons le cas où le fluide n'ait pas de tourbillons, c'est à dire où l'on ait

$$u = \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad v = \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad w = \frac{\partial\varphi}{\partial z}.$$

Les équations $(25)_d$ s'écriront

$$(28)_d \quad \begin{cases} \frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\} + \frac{P}{\rho} - V\right] \\ \qquad\qquad + 2\left(q\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta} - r\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right) + \zeta\frac{dq}{dt} - \eta\frac{dr}{dt} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\} + \frac{P}{\rho} - V\right] \\ \qquad\qquad + 2\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt} = 0, \\ \frac{\partial}{\partial\zeta}\left[\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right)^2\right\} + \frac{P}{\rho} - V\right] \\ \qquad\qquad + 2\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt} = 0. \end{cases}$$

C'est pourquoi

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left[2\left(r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} - p\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) + \xi\frac{dr}{dt} - \zeta\frac{dp}{dt}\right] = \frac{\partial}{\partial\eta}\left[2\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} - q\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right) + \eta\frac{dp}{dt} - \xi\frac{dq}{dt}\right].$$

On tire de là et de l'équation de continuité

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) = \frac{dp}{dt}$$

et d'une manière analogue on a

$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) = \frac{dq}{dt},$$

$$\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi} + q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} + r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}\right) = \frac{dr}{dt}.$$

Par une intégration on trouve

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=\frac{dp}{dt}\xi+\frac{dq}{dt}\eta+\frac{dr}{dt}\zeta+C,$$

$C$ étant une quantité constante.

Si le mouvement de rotation du corps solide est permanent, cette équation devient

$$(29)_d \qquad p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=C.$$

La constante $C$ doit être nulle, parceque si nous conduisons un plan tangent à la surface qui limite le fluide, et qui soit normal à l'axe de rotation, au point de contact on aura

$$p\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}+q\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}+r\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=0.$$

Prenons pour axe $\zeta$ l'axe de rotation, alors l'équation $(29)_d$ deviendra

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\zeta}=0$$

et les équations $(28)_d$ s'écriront

$$\frac{\partial}{\partial\xi}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]=\quad 2r\frac{\partial\varphi}{\partial\eta},$$
$$\frac{\partial}{\partial\eta}\left[\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\xi}\right)^2+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\eta}\right)^2\right\}+\frac{P}{\rho}-V\right]=-2r\frac{\partial\varphi}{\partial\xi},$$

en supposant que le mouvement du fluide soit stationnaire.

L'équation de continuité $(26)_d$ et celle $(27)_d$ qui doit être vérifiée au contour seront

$$(26')_d \qquad \frac{\partial^2\varphi}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial\eta^2}=0, \qquad\qquad (27')_d \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial n}=0.$$

Donc si $\psi$ est la fonction conjuguée de $\varphi$, c'est à dire si

$$\varphi+i\psi=F(\xi+i\eta)$$

on aura

$$P = \rho V - \frac{\rho}{2}\left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \eta}\right)^2\right] - 2r\rho\psi + K,$$

$K$ étant une constante.

Pour que les conditions $(26')_d$, $(27')_d$ soient vérifiées, il faut que $\varphi$ soit polydrome et que l'espace occupé par le fluide n'ait pas la connexion linéaire simple.

Calculons maintenant les composantes du couple de quantité de mouvement du fluide par rapport aux axes. La composante dans la direction $\xi$ sera

$$m_1 = -\int_S \zeta v \rho dS = -\int_S \zeta \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \rho dS = \rho \int_S \zeta \frac{\partial \psi}{\partial \xi} dS,$$

et puisque $\psi$ est constant le long des intersections du contour avec des plans parallèles au plan $\xi\eta$, on trouvera $m_1 = 0$. De même on aura $m_2 = 0$.

On tire de là que l'axe du couple du mouvement interne est parallèle à l'axe de rotation, c'est pourquoi celui-ci (voir $(6')_c$) doit être un axe d'inertie.

Nous avons donc une infinité de mouvements possibles permanents du solide et du fluide renfermé dans un recipient tubulaire sans que le fluide ait des tourbillons. (Voir la note à l'article V de ce chapitre.)

### *Note au chapitre IV.*

1. Nous avons fait usage dans le chapitre précédent du principe de Hamillon et des équations du type Lagrange-Liouville; mais on peut très-bien s'en passer et démontrer directement la relation qui subsiste entre le mouvement adiabatique et le mouvement isocyclique en employant seulement l'équation symbolique du mouvement, c'est à dire l'expression analytique du principe de Lagrange. Il faut pour cela se servir d'une transformation très-élégante de cette équation donnée par M. Beltrami.[1]

2. Lorsqu'on a un système qui peut tourner autour d'un point fixe, soient $q_1$, $q_2$, $q_3$ des paramètres qui déterminent sa position. Suppo-

[1] Beltrami, *Sulle equazioni dinamiche di Lagrange.* Rendiconti del Istituto Lombardo, S. II, Vol. 28, fasc. 14.

sons que dans ce système existent des mouvements cycliques et que les forces relatives aux coordonnées cycliques soient nulles.

L'équation symbolique de M. BELTRAMI peut s'écrire dans ce cas

$$\delta L = \delta U - \left( \sum_1^3 \frac{\partial U}{\partial q_i'} \delta q_i \right)',$$

où $L$ est le travail du couple des forces appliquées au système et $U$ est donné, par des calculs que nous supprimons, par

$$-U = \frac{1}{2}[(A-a)p^2 + (B-b)q^2 + (C-c)r^2 - 2(D+d)qr - 2(E+e)rp - 2(F+f)pq]$$
$$+ l_1 p + l_2 q + l_3 r - \frac{1}{2}\Sigma_i \Sigma_s A_{is} K_i K_s,$$

les notations étant les mêmes que celles que nous avons adoptées dans le chapitre précédent.

On peut tirer de là aisément le théorème auquel nous avons fait allusion et de même les équations du type LAGRANGE-LIOUVILLE.

---

## CHAPITRE V.

### *Quelques applications au mouvement du pôle terrestre.*

#### Article I.

1. Lorsque les mouvements internes ne sont pas stationnaires nous avons vu que les équations différentielles du mouvement sont les suivantes (voir introduction (7))

$$(1)_e \qquad \begin{cases} A\dfrac{dp}{dt} + (C-B)qr + m_3 q - m_2 r + \dfrac{dm_1}{dt} = 0, \\ B\dfrac{dq}{dt} + (A-C)rp + m_1 r - m_3 p + \dfrac{dm_2}{dt} = 0, \\ C\dfrac{dr}{dt} + (B-A)pq + m_2 p - m_1 q + \dfrac{dm_3}{dt} = 0 \end{cases}$$

et on a l'intégrale (voir (6))

$$(2)_0 \qquad (Ap + m_1)^2 + (Bq + m_2)^2 + (Cr + m_3)^2 = K^2.$$

En général on ne peut pas donner d'autres intégrales et par suite on ne peut obtenir l'intégration par des quadratures.

Supposons $A = B$; alors les équations précédentes deviennent

$$(3)_0 \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} + \left[\dfrac{C-A}{A} r + \dfrac{m_3}{A}\right] q = \left(m_2 r - \dfrac{dm_1}{dt}\right)\dfrac{1}{A}, \\ \dfrac{dq}{dt} - \left[\dfrac{C-A}{A} r + \dfrac{m_3}{A}\right] p = \left(-m_1 r - \dfrac{dm_2}{dt}\right)\dfrac{1}{A}, \\ \dfrac{dr}{dt} = -\dfrac{1}{C}\dfrac{dm_3}{dt} + \dfrac{(m_1 q - m_2 p)}{C}. \end{cases}$$

2. Pour intégrer ces équations différentielles nous pouvons employer une méthode d'approximations successives.

A cet effet remarquons que si l'on connaissait $p$ et $q$, on pourrait calculer $r$ par la troisième équation. On trouverait

$$(5)_0 \qquad r = a_1 - \frac{1}{C} m_3 + \frac{1}{C}\int (m_1 q - m_2 p)\, dt,$$

$a_1$ étant une constante arbitraire.

De même si l'on connaissait $r$, on pourrait intégrer les premières équations. En effet posons

$$(5)_0 \qquad \frac{C-A}{A} r + \frac{m_3}{A} = \rho,$$

$$(6)_0 \qquad \begin{cases} \dfrac{1}{A}\left(m_2 r - \dfrac{dm_1}{dt}\right) = \alpha, \\ \dfrac{1}{A}\left(-m_1 r - \dfrac{dm_2}{dt}\right) = \beta; \end{cases}$$

on aura alors

$$\frac{dp}{dt} + \rho q = \alpha,$$

$$\frac{dq}{dt} - \rho p = \beta.$$

En posant

$$u = \int \rho dt$$

ces équations peuvent s'écrire

$$\frac{dp}{du} + q = \frac{\alpha}{\rho}, \qquad \frac{dq}{du} - p = \frac{\beta}{\rho}$$

d'où

$$p = C_2 \cos u - C_3 \sin u.$$
$$q = C_2 \sin u + C_3 \cos u,$$
$$\frac{dC_2}{dt} \cos u - \frac{dC_3}{dt} \sin u = \alpha,$$
$$\frac{dC_2}{dt} \sin u + \frac{dC_3}{dt} \cos u = \beta.$$

Par l'intégration des dernières équations il vient

$$C_2 = \int (\alpha \cos u + \beta \sin u) dt + a_2,$$
$$C_3 = -\int (\alpha \sin u - \beta \cos u) dt + a_3,$$

$a_2$ et $a_3$ étant des constantes arbitraires. Par suite

$$(7)_e \quad \begin{cases} p = \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u) dt + a_2\right] \cos u \\ \qquad\qquad + \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u) dt + a_3\right] \sin u, \\ q = \left[\int (\alpha \cos u + \beta \sin u) dt + a_2\right] \sin u \\ \qquad\qquad - \left[\int (\alpha \sin u - \beta \cos u) dt + a_3\right] \cos u. \end{cases}$$

Prenons d'abord $r$ donné par la formule

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} m_3$$

et substituons cette valeur dans les équations $(6)_e$. D'après les équations $(7)_e$ on déterminera $p$ et $q$ et en substituant les expressions qu'on trouvera

dans l'équation $(4)_e$ on aura une nouvelle valeur pour $r$. On pourra de même employer cette expression de $r$ pour obtenir une nouvelle détermination de $p$ et $q$. Ainsi de suite on aura la solution par des approximations successives.

3. Il est aisé de calculer les séries qui donnent la solution par cette méthode.

En effet posons

$$r_1 = a_1 - \frac{1}{C} M_3, \qquad u_1 = \int_0^t \left(r_1 \frac{C-A}{A} + \frac{m_3}{A}\right) dt,$$

$$\alpha_1 = \frac{1}{A}\left(m_2 r_1 - \frac{dm_1}{dt}\right), \qquad \beta_1 = \left(-m_1 r_1 - \frac{dm_2}{dt}\right),$$

$$p_1 = \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1) dt + a_2\right] \cos u_1 + \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1) dt + a_3\right] \sin u_1,$$

$$q_1 = \left[\int_0^t (\alpha_1 \cos u_1 + \beta_1 \sin u_1) dt + a_2\right] \sin u_1 - \left[\int_0^t (\alpha_1 \sin u_1 - \beta_1 \cos u_1) dt + a_3\right] \cos u_1$$

et écrivons pour $n > 1$ les formules récurrentes

$$r_n = \frac{1}{C} \int_0^t (m_1 q_{n-1} - m_2 p_{n-1}) dt,$$

$$u_n = \frac{C-A}{A} \int_0^t r_n dt,$$

$$\alpha_n = \left(\frac{1}{A} m_2 - \frac{C-A}{A} \sum_1^{n-1} {}_i q_{i-1}\right) r_n, \qquad \beta_n = \left(\frac{1}{A} + \frac{C-A}{A} \sum_1^{n-1} {}_i p_{i-1}\right) r_n,$$

$$p_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$+ \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \sin\left(\sum_1^n u_i\right),$$

$$q_n = \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right) + \beta_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \sin\left(\sum_1^n u_i\right)$$

$$- \left\{\int_0^t \left[\alpha_n \sin\left(\sum_1^n u_i\right) - \beta_n \cos\left(\sum_1^n u_i\right)\right] dt\right\} \cos\left(\sum_1^n u_i\right).$$

Les intégrales des équations proposées seront

$$p = \sum_1^\infty p_n, \qquad q = \sum_1^\infty q_n, \qquad r = \sum_1^\infty r_n.$$

On peut démontrer que ces séries sont convergentes pour les valeurs de $t$ comprises entre certaines limites si l'on suppose que $m_1, m_2, m_3$, $\frac{dm_1}{dt}, \frac{dm_2}{dt}$ soient des quantités finies.

### Article II.

1. Dans les équations différentielles $(1)_e$ on peut regarder $m_1, m_2, m_3$ comme les fonctions inconnues et $p, q, r$ comme des quantités données.

Le problème mécanique qui correspond à cette question analytique est le suivant:

*On connait le mouvement de rotation du système, déterminer les mouvements internes qui correspondent au mouvement de rotation donné.*

Dans le cas où $m_1, m_2, m_3$ sont les fonctions inconnues, l'application de la méthode des approximations successives conduit à des résultats beaucoup plus simples que dans le cas traité dans l'article précédent,

En effet, prenons d'abord

$$m_1^{(1)} = -\int_0^t [(C-B)qr + a_3 q - a_2 r]\,dt - A(p-p_0),$$

$$m_2^{(1)} = -\int_0^t [(A-C)rp + a_1 r - a_3 p]\,dt - B(q-q_0),$$

$$m_3^{(1)} = -\int_0^t [(B-A)pq + a_2 p - a_1 q]\,dt - C(r-r_0),$$

$a_1$, $a_2$, $a_3$ étant des constantes arbitraires.

Ecrivons après les formules récurrentes

$$(8)_e \qquad \left\{\begin{aligned} m_1^{(n)} &= -\int_0^t [m_3^{(n-1)} q - m_2^{(n-1)} r]\,dt, \\ m_2^{(n)} &= -\int_0^t [m_1^{(n-1)} r - m_3^{(n-1)} p]\,dt, \\ m_3^{(n)} &= -\int_0^t [m_2^{(n-1)} p - m_1^{(n-1)} q]\,dt, \end{aligned}\right.$$

et calculons les séries

$$m_1 = a_1 + \sum_1^\infty{}_n\, m_1^{(n)},$$

$$m_2 = a_2 + \sum_1^\infty{}_n\, m_2^{(n)},$$

$$m_3 = a_3 + \sum_1^\infty{}_n\, m_3^{(n)}.$$

Elles donneront les intégrales des équations différentielles $(1)_e$.

Le théorème général de M. Picard[1] sur la méthode des approximations successives, avec la modification apportée par M. Lindelöf, prouve que les séries précédentes sont convergentes pour toute valeur du temps qui soit limitée dans un intervalle où $p, q, r$ sont des fonctions continues et

---

[1] Picard, Traité d'analyse, T. III, page 88. E. Lindelöf (Comptes rendus 26 février 1894).

finies. Il est intéressant de particulariser le raisonnement général à ce cas particulier pour avoir un résultat que nous allons énoncer. Soit $P$ la limite supérieure des valeurs de $p, q, r$ pour $t$ comprise entre $-T$ et $T$.

Les formules $(8)_e$ montrent que si l'on suppose

$$|m_i^{(n)}| < \frac{M}{\underline{|n}} t^n + \frac{N}{\underline{|(n-1)}} t^{n-1} \qquad (i=1,2,3)$$

on aura

$$|m_i^{(n+1)}| < \frac{2MPt^{n+1}}{\underline{|(n+1)}} + \frac{2NPt^n}{\underline{|n}}.$$

Supposons maintenant que l'on ait

$$A \geqq B \geqq C$$

et soit $\Delta$ la limite supérieure des valeurs de $|p-p_0|, |q-q_0|, |r-r_0|$ et $a$ la plus grande des quantités $|a_1|, |a_2|, |a_3|$. Alors on aura

$$|m_i^{(1)}| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] 2Pt + A\Delta$$

et par suite

$$|m_i^{(n)}| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right] \frac{(2Pt)^n}{\underline{|n}} + A\Delta \frac{(2Pt)^{n-1}}{\underline{|(n-1)}},$$

ce qui prouve que les séries $(9)_e$ sont convergentes.

On aura aussi si $|t| < T$

$$(10)_e \qquad |m_i| < \left[\frac{A-C}{2} P + a\right](e^{2Pt} - 1) + A\Delta e^{2Pt}.$$

Par les raisonnements ordinaires on prouve que les séries $(9)_e$ satisfont aux équations différentielles $(1)_e$ lorsque les dérivées de $p, q, r$ sont finies. Prenons dans les formules précédentes $t = t_1$, puis faisons évanouir $t_1$ et changeons en même temps les fonctions $p(t), q(t), r(t)$ de manière que $p(t_1), q(t_1), r(t_1)$ gardent toujours les mêmes valeurs, qu'on désignera par $p, q, r$. On aura à la limite pour $t_1 = 0$

$$m_1 - a_1 = A(p - p_0), \qquad m_2 - a_2 = B(q - q_0), \qquad m_3 - a_3 = C(r - r_0).$$

On a ainsi *les relations qui doivent subsister entre $p, q, r$; $m_1, m_2, m_3$ dans leurs points de discontinuité.* Il est facile d'interpréter ces formules comme

celles qui donnent les discontinuités de la rotation dues à un choc qui change brusquement les valeurs de $m_1, m_2, m_3$.

2. Les résultats du paragraphe précédent nous conduisent à la proposition: *Soit donnée une loi arbitraire de rotation. On pourra toujours engendrer dans un corps quelconque des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps, tels que le corps sans être soumis à aucune force externe, tourne autour du centre de gravité d'après la loi donnée.*

Si le corps était rigide il suivrait les lois bien connues de la rotation libre d'un corps rigide, par suite le théorème précédent peut être énoncé de la manière suivante:

*Toute anomalie qu'on remarque dans la rotation libre d'un corps peut être expliquée par des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps.*

La formule $(10)_6$ montre que $|m_1|, |m_2|, |m_3|$ sont aussi petits que l'on veut, pourvu que $\Delta$ et $T$ soient suffisamment petits.

Donc *toute altération de la rotation d'un corps, pourvu qu'elle soit suffisamment petite, peut être produite par des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps et qui sont aussi petits que l'on veut.*

3. Les propositions précédentes conduisent à des conséquences immédiates dont nous allons donner quelques exemples dans ce paragraphe et dans le paragraphe suivant. *On connaît la rotation d'un corps dans lequel existent des mouvements internes qui ne changent ni la forme ni la distribution des masses du corps. Comment peut-on changer les mouvements internes de manière qu'ils produisent toujours le même effet, c'est à dire que la rotation du corps ne change pas?*

Si $m'_1, m'_2, m'_3$ sont les nouvelles valeurs de $m_1, m_2, m_3$ il faut qu'on ait

$$A\frac{dp}{dt} + (C-B)qr + m'_3 q - m'_2 r + \frac{dm'_1}{dt} = 0,$$

$$B\frac{dq}{dt} + (A-C)rp + m'_1 r - m'_3 p + \frac{dm'_2}{dt} = 0,$$

$$C\frac{dr}{dt} + (B-A)pq + m'_2 p - m'_1 q + \frac{dm'_3}{dt} = 0.$$

Retranchons les équations $(1)_e$ et posons

$$m_1' - m_1 = m_1'', \qquad m_2' - m_2 = m_2'', \qquad m_3' - m_3 = m_3'',$$

on trouve

$$\frac{dm_1''}{dt} + m_3'' q - m_2'' r = 0,$$

$$\frac{dm_2''}{dt} + m_1'' r - m_3'' p = 0,$$

$$\frac{dm_3''}{dt} + m_2'' p - m_1'' q = 0$$

les équations étant du même type que les équations de Poisson (voir Introduction). Si nous appelons $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ ; $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ ; $\alpha_3, \beta_3, \gamma_3$ les cosinus des angles que les angles $\xi, \eta, \zeta$ forment avec les axes fixes $x, y, z$, les intégrales générales seront

$$m_1'' = C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 + C_3\gamma_1,$$

$$m_2'' = C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 + C_3\gamma_2,$$

$$m_3'' = C_1\alpha_3 + C_2\beta_3 + C_3\gamma_3,$$

$C_1, C_2, C_3$ étant des constantes arbitraires; d'où l'on tire

$$m_1' = m_1 + C_1\alpha_1 + C_2\beta_1 + C_3\gamma_1,$$

$$m_2' = m_2 + C_1\alpha_2 + C_2\beta_2 + C_3\gamma_2,$$

$$m_3' = m_3 + C_1\alpha_3 + C_2\beta_3 + C_3\gamma_3.$$

Ces formules résolvent complètement la question proposée.

En prenant $m_1 = m_2 = m_3 = 0$ et en remplaçant $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par les expressions données par Jacobi pour ces cosinus dans le cas d'un système rigide qui n'est soumis à aucune force, on aura *tous les mouvements internes qui ne produisent aucun effet dans la rotation libre d'un corps.*

De même si nous prenons $m_1, m_2, m_3$ constants et que nous mettions à la place de $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ ; $\beta_1, \beta_2, \beta_3$ ; $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ les expressions que nous avons trouvées à l'article VI du chapitre II pour ces cosinus lorsque les mouve-

ments internes sont stationnaires, on trouvera *tous les mouvements internes variables qui produisent le même effet que les mouvements stationnaires.*

On tire de là qu'un corps peut avoir un mouvement de rotation, comme s'il était rigide ou très rapproché à celui qu'il aurait s'il était rigide, et cependant il peut s'engendrer à son intérieur un mouvement tel que le moment du couple de quantité de mouvement soit aussi grand que l'on veut.

4. Un résultat qu'on peut concevoir beaucoup plus facilement est le suivant.

Supposons qu'on ait tracé les polodies correspondant au mouvement rigide sur l'ellipsoïde central du corps ayant pour équation

$$A\xi^2 + B\eta^2 + C\zeta^2 = 1.$$

Si en supposant $B$ compris entre $A$ et $C$, on conduit les plans

$$\frac{\zeta}{\xi} = \sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}}, \qquad \frac{\zeta}{\xi} = -\sqrt{\frac{A(A-B)}{C(B-C)}},$$

la surface de l'ellipsoïde sera découpée en quatre régions.

En prenant deux polodies situées dans la même région on peut déformer l'une d'elles avec continuité en passant par toutes celles intermédiaires jusqu'à la faire coïncider avec l'autre.

Cela ne peut pas être fait pour les polodies situées dans des régions différentes de l'ellipsoïde.

Remarquons que chacune de ces courbes peut être parcourue par le pôle lorsque les mouvements internes sont nuls. On peut donc prévoir qu'engendrant des mouvements internes aussi petits que l'on veut le pôle puisse parcourir une courbe dont les spires soient rapprochées aux polodies et que cette trajectoire soit telle qu'en partant d'un point d'une polodie on aboutisse à un point d'une autre polodie quelconque appartenant à la même région de l'ellipsoïde. Les formules qu'on a données le montrent d'une manière fort simple. En effet ayant égard à l'intégrale $(2)_e$ des équations $(1)_e$, posons

$$(11)_e \qquad \gamma_1 = \frac{Ap + m_1}{K}, \qquad \gamma_2 = \frac{Bq + m_2}{K}, \qquad \gamma_3 = \frac{Cr + m_3}{K}$$

ces quantités seront les cosinus des angles que les axes $\xi, \eta, \zeta$ forment avec l'axe du couple de quantité de mouvement qui est fixe. (Voir Introduction.)

Résolvons les équations précédentes par rapport à $p, q, r$ et substituons les valeurs qu'on trouve dans les équations $(1)_e$; on aura

$$(1')_e \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = (c-b)\gamma_2\gamma_3 + \frac{m_2}{B}\gamma_3 - \frac{m_3}{C}\gamma_2, \quad \frac{d\gamma_2}{dt} = (a-c)\gamma_3\gamma_1 + \frac{m_3}{C}\gamma_1 - \frac{m_1}{A}\gamma_3,$$

$$\frac{d\gamma_3}{dt} = (b-a)\gamma_1\gamma_2 + \frac{m_1}{A}\gamma_2 - \frac{m_2}{B}\gamma_1$$

où l'on a posé $a = \frac{K}{A}$, $b = \frac{K}{B}$, $c = \frac{K}{C}$.

Lorsqu'on suppose $m_1 = m_2 = m_3 = 0$, ces équations deviennent

$$(1'')_e \quad \frac{d\gamma_1}{dt} = (c-b)\gamma_2\gamma_3, \qquad \frac{d\gamma_2}{dt} = (a-c)\gamma_3\gamma_1, \qquad \frac{d\gamma_3}{dt} = (b-a)\gamma_1\gamma_2,$$

c'est à dire elles se réduisent aux équations différentielles du mouvement rigide.

Les équations $(1'')_e$ ont les deux intégrales

$$\gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1, \qquad a\gamma_1^2 + b\gamma_2^2 + c\gamma_3^2 = e$$

et la quantité constante $e$ doit être comprise entre $a$ et $c$, si nous supposons que la valeur $B$ soit comprise entre $A$ et $C$.

Si nous nous rapportons à la distinction des polodies qu'on a faite tout à l'heure, on aura que le passage des polodies d'une région à celles d'une autre a lieu lorsque $e$ franchit la valeur $b$.

Si nous prenons avec JACOBI[1]

$$a > b > e > c \quad \text{ou} \quad a < b < e < c$$

les intégrales des équations $(1'')_e$ seront

$$\gamma_1 = \sqrt{\frac{c-e}{c-a}}\,\mathrm{sn}\,[n(t-t_0), k], \qquad \gamma_2 = \sqrt{\frac{c-e}{c-b}}\,\mathrm{cn}\,[n(t-t_0), k],$$

$$\gamma_3 = \sqrt{\frac{e-a}{c-a}}\,\mathrm{dn}\,[n(t-t_0), k],$$

[1] Voir HERMITE: *Sur quelques applications des fonctions elliptiques.* §§ X, XI.

où $t_0$ est une constante et

$$n = \sqrt{(e-a)(c-b)}, \qquad k = \sqrt{\frac{(b-a)(c-e)}{(e-a)(c-b)}}.$$

Calculons les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ par rapport aux constantes $t_0$ et $e$. On aura d'abord

$$\frac{\partial\gamma_1}{\partial t_0} = -\gamma_2\gamma_3(c-b), \qquad \frac{\partial\gamma_2}{\partial t_0} = -\gamma_3\gamma_1(a-c), \qquad \frac{\partial\gamma_3}{\partial t_0} = -\gamma_1\gamma_2(b-a)$$

par suite ces dérivées seront des quantités finies. Les dérivées des fonctions sn, cn, dn par rapport au module deviennent infinies lorsque $k = 1$. On tire de là que les dérivées de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ seront finies si $e$ ne prend pas les valeurs limites $b$ et $c$.

Cela posé, employons la méthode des variations des constantes arbitraires, et tâchons de vérifier les équations différentielles $(1)_e$ en prenant $t_0$ et $e$ fonctions du temps.

Ces équations déviennent alors

$$(1''')_e \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial t_0}\dfrac{dt_0}{dt} + \dfrac{\partial\gamma_1}{\partial e}\dfrac{de}{dt} + \dfrac{m_2}{B}\gamma_3 - \dfrac{m_3}{C}\gamma_2 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial t_0}\dfrac{dt_0}{dt} + \dfrac{\partial\gamma_2}{\partial e}\dfrac{de}{dt} + \dfrac{m_3}{C}\gamma_1 - \dfrac{m_1}{A}\gamma_3 = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial t_0}\dfrac{dt_0}{dt} + \dfrac{\partial\gamma_3}{\partial e}\dfrac{de}{dt} + \dfrac{m_1}{A}\gamma_2 - \dfrac{m_2}{B}\gamma_1 = 0. \end{cases}$$

Soient $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$, et $\gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3''$ deux systèmes de valeurs de $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ qui correspondent à deux valeurs quelconques $\tau'$ e $\tau''$ de $t - t_0$ et à deux valeurs $e'$ et $e''$ de $e$ comprises entre les limites $b$ et $c$. On pourra prendre $t_0$ et $e$ fonctions du temps de manière qu'en posant $\tau(t) = t - t_0(t)$ on ait

$$\tau(t_1) = \tau', \qquad \tau(t_2) = \tau'' + 2n\omega, \qquad \left(\frac{dt_0}{dt}\right)_{t=t_1} = 0, \qquad \left(\frac{dt_0}{dt}\right)_{t=t_2} = 0,$$

$$e(t_1) = e', \qquad e(t_2) = e'', \qquad (e' - e(t))(e'' - e(t)) < 0,$$

$$\left(\frac{de}{dt}\right)_{t=t_1} = 0, \qquad \left(\frac{de}{dt}\right)_{t=t_2} = 0,$$

$2\omega$ étant la période réelle des fonctions elliptiques correspondant au module

$$k = \sqrt{\frac{(b-a)(c-e'')}{(e''-a)(c-b)}}.$$

Alors les fonctions

$$\gamma_1 = \gamma_1(t - t_0(t), e(t)), \quad \gamma_2 = \gamma_2(t - t_0(t), e(t)), \quad \gamma_3 = \gamma_3(t - t_0(t), e(t)),$$

pour $t = t_1$ prendront les valeurs $\gamma_1', \gamma_2', \gamma_3'$ et pour $t = t_2$ prendront les valeurs $\gamma_1'', \gamma_2'', \gamma_3''$ et leurs dérivées par rapport à $t_0$ et à $e$ seront finies.

Nous pouvons calculer d'après les formules $(1''')_e$ un système de valeurs $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ de $m_1, m_2, m_3$ qui les vérifient de sorte que ces valeurs soient nulles pour $t = t_1$, et pour $t = t_2$.

Ayant égard aux formules $(11)_e$ on tire de là que si pendant le temps $t_1 \dots t_2$ les mouvements internes sont caractérisés par $m_1(t), m_2(t), m_3(t)$ et si les composantes de la rotation du corps au temps $t_1$ ont les valeurs

$$\frac{A\gamma_1'}{K}, \frac{B\gamma_2'}{K}, \frac{C\gamma_3'}{K}$$

au temps $t_2$ elles deviendront

$$\frac{A\gamma_1''}{K}, \frac{B\gamma_2''}{K}, \frac{C\gamma_3''}{K},$$

ce qui prouve que le pôle peut passer d'un point d'une polodie à un point d'une autre polodie appartenant à la même région de l'ellipsoïde.

Mais on peut choisir les fonctions $t_0(t)$ et $e(t)$ de sorte que les dérivées $\frac{dt_0}{dt}, \frac{de}{dt}$ soient aussi petites que l'on veut de manière que même $m_1, m_2, m_3$ aient des valeurs absolues plus petites qu'une quantité donnée arbitrairement; donc le passage du pôle peut arriver par des mouvements internes aussi petits que l'on veut.

Nous avons jusqu'ici exclu la valeur $e = c$ qui correspond à un sommet de l'ellipsoïde, parce que pour cette valeur $\frac{\partial\gamma_1}{\partial e}, \frac{\partial\gamma_2}{\partial e}, \frac{\partial\gamma_3}{\partial e}$ deviennent infinies, mais on reconnaît facilement que cette exclusion n'est pas nécessaire. En effet il suffit de changer de variable et de prendre $\sqrt{|c-e|} = \delta$ au lieu de $e$ et l'on voit tout de suite que si l'on regarde $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ comme des fonctions de $t, t_0$ et $\delta$, leurs dérivées par rapport

à $\delta$ ne sont pas infinies lorsque $\delta = 0$. On peut donc généraliser la proposition précédente en disant que par des mouvements internes aussi petits que l'on veut le pôle peut être conduit d'un point à un autre situés intérieurement à la même région de l'ellipsoïde.

Le même résultat peut être obtenu d'une autre manière en suivant laquelle il n'est pas nécessaire d'exclure les points situés sur les frontières des régions dans lesquelles la surface de l'ellipsoïde a été partagée. Il suffit pour cela de remarquer que les polodies se rapprochent autant que l'on veut aux sommets de l'ellipsoïde et aux frontières qui séparent les régions qu'on a envisagées, et en outre d'avoir égard au dernier théorème du $2^{me}$ §.

Si $A = B$, c'est à dire $a = b$, alors $k = 0$, les polodies sont les parallèles de l'ellipsoïde et les propositions précédentes, valables pour chaque région, peut s'étendre à toute la surface de l'ellipsoïde par les mêmes raisonnements qu'on vient de faire.

5. Nous avons calculé dans cet article les composantes du couple de quantité de mouvement relatif au mouvement interne, qui correspond à un mouvement donné du pôle.

Or on peut imaginer d'une infinité de manières des mouvements cycliques internes qui correspondent aux valeurs trouvées en général pour $m_1, m_2, m_3$. Il suffit pour cela de rappeler, que lorsque les paramètres sont constants les équations $(10'')_d$ sont équivalentes aux équations $(1)_e$.

Prenons maintenant les formules $(9)_d$ qui deviennent

$$m_1 = \sum_1^n {}_i a_i \omega_i,$$

$$m_2 = \sum_1^n {}_i b_i \omega_i,$$

$$m_3 = \sum_1^n {}_i c_i \omega_i.$$

Les fonctions $m_1, m_2, m_3$ étant connues, on pourra d'une infinité de manières trouver des fonctions $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ qui satisfont aux équations précédentes.

## Article III.

1. Dans les articles précédents nous avons montré que par la méthode des approximations successives on peut résoudre la question de déterminer le mouvement de rotation du système lorsqu'on connaît le mouvement interne, et réciproquement on peut déterminer les mouvements internes, la rotation du système étant donnée.

Dans les applications pratiques au mouvement de la terre, la question analytique se simplifie, en négligeant des termes très-petits qui paraissent dans les formules générales.

En effet dans ce cas nous pouvons regarder les moments d'inertie $A$ et $B$ égaux et $p$ et $q$ très-petits.

On pourra supposer que les variations de $r$ soient aussi très-petites, de sorte qu'en posant $r = \omega + \varepsilon$ on puisse regarder $\omega$ comme constant et $\varepsilon$ comme une quantité du même ordre que $p$ et $q$. Alors de la dernière des équations $(3)_e$ on tire

$$m_3 = m_3^0 - \int_0^t (m_2 p - m_1 q)\, dt - C\varepsilon = m_3^0 + u,$$

où $m_3^0$ désigne une quantité constante.

Les premières équations $(3)_e$ peuvent s'écrire

$$\frac{dp}{dt} + \left[\frac{C-A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{m_3^0 + u}{A}\right] q = -\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{dt} - m_2(\omega + \varepsilon)\right) = \alpha,$$

$$\frac{dq}{dt} - \left[\frac{C-A}{A}(\omega + \varepsilon) + \frac{m_3^0 + u}{A}\right] p = -\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{dt} + m_1(\omega + \varepsilon)\right) = \beta.$$

Si l'on suppose que les termes

$$(12)_e \qquad \frac{uq}{A}, \quad \frac{up}{A}, \quad \frac{m_2 \varepsilon}{A}, \quad \frac{m_1 \varepsilon}{A}, \quad \frac{C-A}{A}\varepsilon q, \quad \frac{C-A}{A}\varepsilon p$$

soient négligeables, alors les équations précédentes deviendront

$$(13)_e \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{dt} + \left[\dfrac{C-A}{A}\omega + \dfrac{m_3^0}{A}\right] q = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{dt} - m_2\omega\right) = \alpha, \\[2ex] \dfrac{dq}{dt} - \left[\dfrac{C-A}{A}\omega + \dfrac{m_3^0}{A}\right] p = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{dt} + m_1\omega\right) = \beta. \end{cases}$$

2. Pour réduire les équations différentielles à la forme précédente il n'est pas nécessaire de supposer que toutes les quantités $(12)_0$ soient négligeables, pourvu qu'on change la variable indépendante.

Divisons les premières équations $(3)_e$ par $r$, on aura

$$\frac{dp}{rdt}+\left[\frac{C-A}{A}+\frac{m_3}{Ar}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{rdt}-m_2\right),$$
$$\frac{dq}{rdt}-\left[\frac{C-A}{A}+\frac{m_3}{Ar}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{rdt}+m_1\right).$$

Posons

$$\tau=\int_0^t\frac{rdt}{\omega}$$

$\omega$ étant la valeur de $r$ pour $t=0$. Si nous prenons $\tau$ pour variable indépendante, on trouvera

$$\frac{dp}{d\tau}+\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3}{A}\frac{\omega}{r}\right]q=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_1}{d\tau}-m_2\omega\right),$$
$$\frac{dq}{d\tau}-\left[\frac{C-A}{A}\omega+\frac{m_3}{A}\frac{\omega}{r}\right]p=-\frac{1}{A}\left(\frac{dm_2}{d\tau}+m_1\omega\right).$$

Désignons par $m_3^0$ la valeur de $m_3$ pour $\tau=0$, et écrivons $r-\omega=\varepsilon$, il viendra

$$m_3=m_3^0-\int_0^\tau(m_2p-m_1q)\frac{\omega}{r}d\tau-C\varepsilon$$

d'où

$$(14)_e\qquad\begin{cases}\dfrac{dp}{d\tau}+\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]q+vq=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{d\tau}-m_2\omega\right),\\[2ex]\dfrac{dq}{d\tau}-\left[\dfrac{C-A}{A}\omega+\dfrac{m_3^0}{A}\right]p-vp=-\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{d\tau}+m_1\omega\right),\end{cases}$$

$v$ étant donné par la formule

$$v=-\frac{\omega}{r}\left\{\int_0^\tau\left(\frac{m_2}{A}p-\frac{m_1}{A}q\right)\frac{\omega}{r}d\tau+\left(\frac{C}{A}+\frac{m_3^0}{A\omega}\right)\varepsilon\right\}.$$

Supposons maintenant $p, q, r$ très-petits de sorte que par rapport aux autres quantités qui paraissent dans les formules *on puisse les regarder comme des quantités infiniment petites du premier ordre.* La formule précédente démontre que *$v$ est infiniment petit du même ordre.* Par suite *les termes $qv$, $pv$ seront des quantités infiniment petites du second ordre.*

En les négligeant, les équations différentielles $(14)_e$ deviendront

$$(13')_e \qquad \begin{cases} \dfrac{dp}{d\tau} + \left[\dfrac{C-A}{A}\omega + \dfrac{m_3^0}{A}\right]q = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_1}{d\tau} - m_2\omega\right), \\[2ex] \dfrac{dq}{d\tau} - \left[\dfrac{C-A}{A}\omega + \dfrac{m_3^0}{A}\right]p = -\dfrac{1}{A}\left(\dfrac{dm_2}{d\tau} + m_1\omega\right). \end{cases}$$

On a donc réduit les équations différentielles à la forme $(13)_e$ en supposant seulement qu'on puisse regarder $p, q, \varepsilon$ comme des quantités infiniment petites du premier ordre et en négligeant les infiniment petits du second ordre.

Entre les équations $(13)_e$ et $(13')_e$ il n'y a que la variable indépendante qui soit différente. Dans les premières équations on a $t$, dans les autres on a $\tau$. Mais remarquons que si l'on pose $\omega = 2\pi$ et si l'on se rapporte au mouvement de la terre *la variable qui mesure effectivement le temps* est $\tau$.

Il est évident que la discussion que nous allons faire des équations $(13)_e$ est applicable sans aucune modification aux équations $(13')_e$.

3. Dans les équations $(13)_e$ on peut supposer que $m_1$ et $m_2$ soient données et qu'on les intègre par rapport à $p$ et $q$. Au contraire on peut donner $p$ et $q$ et déterminer $m_1$ et $m_2$. Comme nous avons déjà vu dans les articles précédents le premier problème correspond *à déterminer le mouvement du pôle lorsqu'on connaît le mouvement interne* et le second problème se rapporte *à la détermination des mouvements internes lorsqu'on connaît le mouvement du pôle.*

Il est évident que si nous voulons appliquer les résultats de M. Chandler (voir l'article V) il faudra avoir égard au second problème. Nous allons cependant traiter les deux problèmes ensemble.

Posons pour simplifier

$$\frac{C-A}{A}\omega + \frac{m_3^0}{A} = \rho$$

et ajoutons les équations $(13)_e$ après avoir multiplié la deuxième équation par $i$. On aura

$$\frac{d(p+iq)}{dt} - i\rho(p+iq) = -\frac{1}{A}\left[\frac{d(m_1+im_2)}{dt} + i\omega(m_1+im_2)\right] = \alpha + i\beta$$

d'où l'on tire

$$(15)_e \qquad p + iq = e^{i\rho t}\left[\int(\alpha+i\beta)e^{-i\rho t}dt + C\right],$$

$$(15')_e \qquad \frac{1}{A}(m_1+im_2) = e^{-i\omega t}\left[-\int(\alpha+i\beta)e^{i\omega t}dt + D\right],$$

$C$ et $D$ étant des constantes arbitraires.

4. Dans le cas que nous discutons le pôle est très-peu éloigné de l'extrémité de l'axe d'inertie $\zeta$ et dans l'ordre d'approximation dans lequel nous envisageons la question nous pouvons supposer que le mouvement ait lieu dans le plan tangent à l'ellipsoïde d'inertie conduit par l'extrémité de l'axe $\zeta$. Alors on peut regarder les coordonnées $\xi$, $\eta$ du pôle dans ce plan comme proportionnelles à $p$ et $q$.

Supposons maintenant que le mouvement du pôle soit décomposable dans une série de *mouvements harmoniques*.

Avant de développer les conséquences qui découlent de cette hypothèse nous allons donner quelques définitions.

Nous concevons un mouvement harmonique comme un mouvement d'un point sur une ellipse de manière que le rayon vecteur conduit par le centre décrit des aires proportionnelles au temps. La *période* est la durée d'une révolution.

Si nous envisageons tous les mouvements harmoniques d'une période donnée, sans avoir égard à leur amplitude, nous trouverons une infinité de mouvements possibles en changeant le rapport de la longueur des axes de la trajectoire et leurs inclination par rapport à un axe fixe.

Un point qui pourra se mouvoir dans un plan avec un mouvement harmonique d'une période donnée sur des ellipses dont les axes sont dans un rapport quelconque et ont une direction quelconque aura toutes les sortes de mouvements harmoniques qu'on a considérés précédemment, et pour simplifier nous dirons qu'il peut prendre un *mouvement harmonique quelconque de la période donnée.*

5. Cela posé écrivons les formules qu'on trouve dans l'hypothèse que nous venons de faire sur le mouvement du pôle.

On aura

$$\alpha = \alpha_0 + \Sigma(\alpha_n \cos \lambda_n t + \alpha'_n \sin \lambda_n t),$$

$$\beta = \beta_0 + \Sigma(\beta_n \cos \lambda_n t + \beta'_n \sin \lambda_n t)$$

d'où

$$\alpha + i\beta = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum \left(\frac{\alpha_n + \beta'_n + i(\beta_n - \alpha'_n)}{2} e^{i\lambda_n t} + \frac{\alpha'_n - \beta_n + i(\alpha'_n + \beta_n)}{2} e^{-i\lambda_n t}\right)$$

$$= A_0 + \Sigma(A_n e^{i\lambda_n t} + A'_n e^{-i\lambda_n t})$$

ayant supposé

$$(16)_e \qquad A_0 = \alpha_0 + i\beta_0, \qquad A_n = \frac{\alpha_n + \beta'_n + i(\beta_n - \alpha'_n)}{2},$$

$$A'_n = \frac{\alpha_n - \beta'_n + i(\alpha'_n + \beta_n)}{2}.$$

Par conséquent

$$\int (\alpha + i\beta) e^{-i\rho t} dt = \int \{A_0 e^{-i\rho t} + \Sigma(A_n e^{i(\lambda_n - \rho)t} + A'_n e^{-i(\lambda_n + \rho)t})\} dt$$

$$= \frac{A_0}{-i\rho} e^{-i\rho t} + \sum \left(\frac{A_n}{i(\lambda_n - \rho)} e^{i(\lambda_n - \rho)t} + \frac{A'_n}{-i(\lambda_n + \rho)} e^{-i(\lambda_n + \rho)t}\right).$$

Employons maintenant la formule $(15)_e$. Nous trouverons

$$p + iq = \frac{A_0}{-i\rho} + Ce^{i\rho t} + \sum \left(\frac{A_n}{i(\lambda_n - \rho)} e^{i\lambda_n t} + \frac{A'_n}{-i(\lambda_n + \rho)} e^{-i\lambda_n t}\right)$$

et en séparant la partie réelle de la partie imaginaire on aura

$$(17)_e \quad \begin{cases} p = -\frac{\beta_0}{\rho} + (C_1 \cos \rho t - C_2 \sin \rho t) \\ \qquad + \sum \frac{(\beta_n \rho - \alpha'_n \lambda_n) \cos \lambda_n t + (\alpha_n \lambda_n + \beta'_n \rho) \sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \\ q = \frac{\alpha_0}{\rho} + (C_1 \sin \rho t + C_2 \cos \rho t) \\ \qquad + \sum \frac{-(\beta'_n \lambda_n + \alpha_n \rho) \cos \lambda_n t + (\beta_n \lambda_n - \alpha'_n \rho) \sin \lambda_n t}{\lambda_n^2 - \rho^2}, \end{cases}$$

ayant posé $C = C_1 + iC_2$.

De même si nous écrivons $D = D_1 + iD_2$, on pourra calculer les valeurs de $\frac{m_1}{A}$ et $\frac{m_2}{A}$ et on trouvera les formules suivantes

$$(18)_e \quad \begin{cases} \frac{m_1}{A} = -\frac{\beta_0}{\omega} + (D_1 \cos\omega t - D_2 \sin\omega t) \\ \qquad + \sum \frac{(\beta_n\omega + \alpha'_n\lambda_n)\cos\lambda_n t - (\alpha_n\lambda_n - \beta'_n\omega)\sin\lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}, \\ \frac{m_2}{A} = \frac{\alpha_0}{\omega} + (D_1 \sin\omega t + D_2 \cos\omega t) \\ \qquad + \sum \frac{(\beta'_n\lambda_n - \alpha_n\omega)\cos\lambda_n t - (\beta_n\lambda_n + \alpha'_n\omega)\sin\lambda_n t}{\lambda_n^2 - \omega^2}. \end{cases}$$

6. Les dénominateurs des formules $(17)_e$ et $(18)_e$ s'annulent lorsqu'on a $\lambda_n = \rho$, $\lambda_n = \omega$. On tire de là que *le pôle peut avoir un mouvement harmonique quelconque avec un période* $\frac{2\pi}{\lambda_n}$ $(\lambda_n \gtrless \omega)$ *tandis qu'il ne peut avoir qu'un mouvement harmonique circulaire avec la période* $\frac{2\pi}{\omega}$.

En effet si $\lambda_n = \omega$ il faut que l'on ait

$$\beta_n = -\alpha'_n, \qquad \alpha_n = \beta'_n.$$

Donc les termes relatifs à la période $\frac{2\pi}{\omega}$ qui paraissent dans les expressions de $p$ et de $q$ sont de la forme

$$\frac{\mu}{\omega - \rho}\sin\omega t - \frac{\nu}{\omega - \rho}\cos\omega t,$$
$$-\frac{\mu}{\omega - \rho}\cos\omega t - \frac{\nu}{\omega - \rho}\sin\omega t$$

et ils correspondent évidemment à un mouvement harmonique circulaire.

Si $\lambda_n = \rho$ on doit avoir

$$\beta_n = \alpha'_n, \qquad \alpha_n = -\beta'_n;$$

par suite les termes de $p$ et $q$ qui sont relatifs à la période $\frac{2\pi}{\rho}$ auront la forme

$$(C_1 + h_1)\cos\rho t - (C_2 + h_2)\sin\rho t,$$
$$(C_1 - h_1)\sin\rho t + (C_2 - h_2)\cos\rho t,$$

$h_1$ et $h_2$ étant des quantités arbitraires; et par suite ils correspondent à un mouvement harmonique quelconque.

Si $\lambda_n$ a une valeur qui n'est égale ni à $\rho$ ni à $\omega$, on pourra prendre arbitrairement les coefficients $\alpha_n$, $\beta_n$, $\alpha'_n$, $\beta'_n$ et en conséquence le mouvement harmonique correspondant sera quelconque.

C. Q. F. D.

7. D'une manière tout à fait analogue à ce que nous avons établi précédemment on pourra dire maintenant qu'il est possible qu'il existe un mouvement interne *quelconque* de la période $\lambda$ si dans les expressions de $\frac{m_1}{A}$ et $\frac{m_2}{A}$ paraissent des termes de la forme

$$m \cos \lambda t + n \sin \lambda t \ , \ m' \cos \lambda t + n' \sin \lambda t$$

où les coefficients constants $m$, $n$, $m'$, $n'$ peuvent avoir des rapports quelconques entre eux.

En répétant le raisonnement qu'on vient de faire dans le paragraphe précédent on arrive à la conclusion que *si le mouvement du pôle est décomposable dans une série de mouvements harmoniques, il peut exister des mouvements internes quelconques ayant une période différente de* $\frac{2\pi}{\rho}$, *mais il ne peut exister qu'un mouvement interne particulier ayant la période* $\frac{2\pi}{\rho}$.

8. Nous venons de reconnaître que les périodes $\frac{2\pi}{\omega}$, $\frac{2\pi}{\rho}$ sont des périodes singulières pour les mouvements du pôle et pour les mouvements internes.

Une autre propriété qui se rattache à ces périodes est la suivante, et elle découle immédiatement des formules $(17)_e$ et $(18)_e$.

*A tout mouvement harmonique du pôle ayant la période* $\frac{2\pi}{\lambda_n} \gtrless \begin{cases} \frac{2\pi}{\rho} \\ \frac{2\pi}{\omega} \end{cases}$ *correspond un mouvement interne périodique ayant une période égale et réciproquement. Les constantes* $\alpha_n$, $\alpha'_n$, $\beta_n$, $\beta'_n$ *définissent les deux mouvements indépendamment des mouvements ayant une période différente.*

*Au contraire les mouvements internes ne peuvent pas caractériser le mouvement du pôle ayant la période* $\frac{2\pi}{\rho}$, *et le mouvement du pôle ne peut pas caractériser les mouvements internes ayant la période* $\frac{2\pi}{\omega}$. *Il peut exister des mouvements internes ayant la période* $\frac{2\pi}{\omega}$ *qui n'ont aucune influence sur le mouvement du pôle.*

### Article IV.

1. Regardons l'axe $OM$ du mouvement interne comme résultant d'un vecteur constant, d'un vecteur variable avec la période $\frac{2\pi}{\omega}$, d'un vecteur variable avec la période $\frac{2\pi}{\rho}$ et enfin des vecteurs $OM^{(\lambda_1)}$, $OM^{(\lambda_2)}$, ... variables avec les périodes $\frac{2\pi}{\lambda_1}$, $\frac{2\pi}{\lambda_2}$, ... en supposant

$$\lambda_n \gtrless \left| \begin{array}{l} \omega \\ \rho \end{array} \right. .$$

Les projections de $OM^{(\lambda_n)}$ dans les directions $\xi$, $\eta$ soient les termes ayant la période $\frac{2\pi}{\lambda_n}$ dans les expressions de $\frac{m_1}{A}$, $\frac{m_2}{A}$ que nous avons trouvées dans l'article précédent (voir $(18)_e$).

Nous allons résoudre la question suivante: *déterminer le mouvement de l'extrémité* $M^{(\lambda)}$ *du vecteur* $OM^{(\lambda)}$ *étant connu le mouvement du pôle ayant la période* $\frac{2\pi}{\lambda_n} = \frac{2\pi}{\lambda}$.

Il est évident que les formules de l'article précédent nous donneront le mouvement de la projection du point $M^{(\lambda)}$ dans le plan de l'équateur.

Prenons les plans coordonnés $\xi\zeta$ et $\eta\zeta$ de manière que les axes de l'ellipse décrite par le pôle dans le mouvement harmonique ayant la période $\frac{2\pi}{\lambda}$ soient situés dans ces plans.

Nous aurons

$$\frac{p^{(\lambda)}}{\omega} = a \cos \lambda t, \qquad \frac{q^{(\lambda)}}{\omega} = b \sin \lambda t$$

ayant désigné par $p^{(\lambda)}$ et $q^{(\lambda)}$ les termes des expressions $(17)_e$ qui ont la période $\frac{2\pi}{\lambda}$.

Si $\varphi$ et $\psi$ sont les sémiaxes de l'ellipse décrite par le pôle et si on les mesure en secondes d'arcs on aura

$$a = \operatorname{tg}\varphi, \qquad b = \operatorname{tg}\psi.$$

Soient $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ les constantes des formules $(17)_c$ qui correspondent à la période $\frac{2\pi}{\lambda}$. On aura

$$\frac{\beta\rho - \alpha'\lambda}{\lambda^2 - \rho^2} = a\omega, \qquad \alpha\lambda + \beta'\rho = 0,$$

$$\beta\lambda + \alpha\rho = 0, \qquad \frac{\beta\lambda - \alpha'\rho}{\lambda^2 - \rho^2} = b\omega$$

d'où l'on déduit

$$\alpha = 0, \qquad \beta' = 0, \qquad \beta = (b\lambda - a\rho)\omega, \qquad \alpha' = (b\rho - a\lambda)\omega.$$

Par suite les termes de $\frac{m_1}{A\omega}$, $\frac{m_2}{A\omega}$ qui ont la période $\frac{2\pi}{\lambda}$ seront

$$\frac{m_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{(b\lambda - a\rho)\omega + (b\rho - a\lambda)\lambda}{\lambda^2 - \omega^2}\cos\lambda t,$$

$$\frac{m_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \frac{-(b\lambda - a\rho)\lambda - (b\rho - a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2}\sin\lambda t.$$

2. Les maxima des valeurs absolues de $\frac{m_1^{(\lambda)}}{A\omega}$ correspondent aux valeurs $t = \frac{n\pi}{\lambda}$, $n$ étant un nombre entier, et sont donnés par

$$\frac{M_1^{(\lambda)}}{A\omega} = \left|\frac{(b\lambda - a\rho)\omega + (b\rho - a\lambda)\lambda}{\lambda^2 - \omega^2}\right|.$$

Les maxima des valeurs absolues de $\frac{m_2^{(\lambda)}}{A\omega}$ correspondent à $t = \frac{(2n+1)}{2}\frac{\pi}{\lambda}$. Ils sont

$$\frac{M_2^{(\lambda)}}{A\omega} = \left|\frac{-(b\lambda - a\rho)\lambda - (b\rho - a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2}\right|,$$

d'où l'on tire

$$(19)_c \qquad \left\{\begin{aligned} 2M_1^{(\lambda)} &= \left|\frac{A}{C}\,\frac{(2b\lambda - 2a\rho)\omega + (2b\rho - 2a\lambda)\lambda}{\lambda^2 - \omega^2}\right| C\omega, \\ 2M_2^{(\lambda)} &= \left|\frac{A}{C}\,\frac{-(2b\lambda - 2a\rho)\lambda - (2b\rho - 2a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2}\right| C\omega. \end{aligned}\right.$$

On pourra donc énoncer les propositions suivantes:

1° *Si nous projetons sur le plan de l'équateur l'extrémité* $M^{(\lambda)}$ *de l'axe des mouvements internes partiels dont la période est* $\frac{2\pi}{\lambda}$, *la projection* $m_\lambda$ *a un mouvement harmonique sur une ellipse dont les axes sont parallèles aux axes de l'ellipse décrite par le pôle dans le mouvement harmonique de la même période.*

2° *Lorsque* $m_\lambda$ *rejoint un sommet de sa trajectoire, le pôle aussi dans le mouvement harmonique de la même période rejoint un sommet.*

3° *Les longueurs des axes de l'ellipse décrite par le point* $m_\lambda$ *sont données par les formules* $(19)_e$.

3. Le mouvement harmonique du pôle ayant la période $\frac{2\pi}{\lambda}$ est le mouvement résultant de deux mouvements harmoniques de la même période qui ont lieu sur les axes $\xi, \eta$.

De même le mouvement du point $m_\lambda$ peut être obtenu en composant deux mouvements harmoniques dont les trajectoires sont les axes coordonnées $\xi, \eta$.

*Le mouvement harmonique du pôle et celui de* $m_\lambda$ *dans la direction* $\xi$ *auront la même phase si la quantité*

$$(20)_e \qquad 2\frac{(b\lambda - a\rho)\omega + (b\rho - a\lambda)\lambda}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} + (a-b)\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}$$

*est positive, et ils seront en opposition de phase si la même quantité est négative.*

*Le mouvement harmonique du pôle et celui de* $m_\lambda$ *dans la direction* $\eta$ *auront la même phase si la quantité*

$$(20')_e \qquad 2\frac{-(b\lambda - a\rho)\lambda - (b\rho - a\lambda)\omega}{\lambda^2 - \omega^2} = (a+b)\frac{\rho - \lambda}{\omega + \lambda} - (a-b)\frac{\rho + \lambda}{\omega - \lambda}$$

*est positive; et si elle est négative les deux mouvements seront en opposition de phase.*

Nous supprimons la démonstration de ces propositions qu'on déduit aisément des formules précédentes.

### Article V.

1. Si nous voulons appliquer les résultats précédents au mouvement de la terre il faut supposer que $\frac{2\pi}{\omega}$ représente le jour sidéral.

On n'a observé aucune variation diurne des latitudes; cela ne signifie pas qu'ils n'y ait pas de mouvements internes avec la période diurne, car on a vu qu'il peut exister des mouvements internes avec la période $\frac{2\pi}{\omega}$ qui n'ont pas d'influence sur le mouvement du pôle. (Article IV, § 8.)

2. Examinons la période $\frac{2\pi}{\rho}$. Nous avons[1]

$$\rho = \frac{C-A}{A}\omega + \frac{m_3^0}{A} = \frac{\omega}{305} + \frac{m_3^0}{A}$$

d'où, en prenant pour unité de temps le jour sidéral,

$$\frac{2\pi}{\rho} = \frac{305}{1 + 305\frac{m_3^0}{A\omega}} = \frac{305}{1 + 306\frac{m_3^0}{C\omega}}.$$

Donc $\frac{2\pi}{\rho}$ est la période eulérienne changée dans le rapport

$$\frac{1}{1 + 306\frac{m_3^0}{C\omega}}.$$

Si de telle manière on voulait trouver la période de 430 jours découverte par M. Chandler on devrait avoir

$$\frac{430}{305} = \frac{1}{1 + 306\frac{m_3^0}{C\omega}}$$

---

[1] Nous supposons $\frac{C-A}{A} = \frac{1}{305}$ sans discuter ici si ce rapport qu'on calculé d'après les phénomènes de précession et de nutation ne peut être changé à cause du mouvement interne.

d'où

$$\frac{m_3^0}{C\omega} = -\frac{1}{1053}.$$

3. Sans discuter ce résultat, appliquons les résultats établis par M. Chandler dans le N° 329 de l'Astronomical Journal de l'année 1894, relativement au mouvement du pôle ayant la période annuelle.

On peut tirer de là les éléments correspondant au mouvement interne capable de l'engendrer.

A cet effet il suffit de substituer dans les formules que nous avons trouvées les valeurs suivantes:

$$\begin{cases} \omega = 2\pi, \\ \lambda = \frac{2\pi}{366}, \\ 2\varphi = 0'',3, \\ 2\psi = 0'',08, \end{cases}$$

le jour sidéral étant l'unité de temps.

En effectuant les calculs, on a approximativement

$$2a = 2\operatorname{tg}\varphi = 2\pi\frac{3}{10\times 360\times 60\times 60},$$

$$2b = 2\operatorname{tg}\psi = 2\pi\frac{8}{100\times 360\times 60\times 60}.$$

Il faudra supposer que l'axe $\xi$ forme avec le méridien de Greenwich un angle de 45°.

Prenons comme au paragraphe précédent

$$\frac{A}{C} = \frac{305}{306},$$

on trouvera à cause des équations $(19)_e$

$$2M_1^{(\lambda)} = \frac{37}{10^{10}}C\omega,$$

$$2M_2^{(\lambda)} = \frac{27}{10^{10}}C\omega$$

si l'on suppose $\rho = \frac{2\pi}{305}$; et

$$2M_1^{(\lambda)} = \frac{23}{10^{10}} C\omega,$$

$$2M_2^{(\lambda)} = \frac{31}{10^{10}} C\omega$$

en supposant $\rho = \frac{2\pi}{430}$.

L'axe $a$ de l'ellipse décrite par le pôle forme un angle de 45° avec le méridien de Greenwich, par conséquent le grand axe de l'ellipse parcourue par le point $m^{(\lambda)}$ sera située dans le plan méridien qui a la longitude de 45°.

Remarquons encore que la quantité $(20)_e$ est positive et la quantité $(20')_e$ est négative.

En résumant tous ces résultats on peut énoncer les propositions suivantes:

*Si l'on cherche la variation que doit subir l'axe $OM^{(\lambda)}$ du mouvement interne terrestre (dans l'hypothèse de la non-plasticité de la terre) pour donner au pôle le mouvement harmonique étudié par M. Chandler, ayant la période annuelle, on trouve que:*

1° *projetant $M^{(\lambda)}$ sur l'équateur en $m^{(\lambda)}$, ce point décrira une ellipse dont le grand axe fait un angle de 45° avec le méridien de Greenwich;*

2° *les axes de cette ellipse seront égaux à $\frac{37}{10^{10}} C\omega$, $\frac{27}{10^{10}} C\omega$, ou à $\frac{23}{10^{10}} C\omega$, $\frac{31}{10^{10}} C\omega$ suivant que l'on suppose $\rho = \frac{2\pi}{305}$ ou $\rho = \frac{2\pi}{430}$;*

3° *décomposant le mouvement du pôle et celui de $m_\lambda$ suivant les directions des axes de l'ellipse décrite par le pôle, les deux mouvements dans la direction du grand axe auront la même phase et les mouvements dans la direction du petit axe auront des phases opposées.*

4. Pour exercice des formules qu'on a données dans l'article précédent on peut répéter un calcul analogue à celui qu'on vient de faire pour résoudre le problème suivant:

*Supposons qu'il existe un mouvement interne ayant la période de 430 jours. Quels sont les éléments de ce mouvement pour qu'il soit capable de produire le mouvement du pôle étudié par M. Chandler ayant la même période?*

Si nous prenons $\rho = \frac{2\pi}{305}$ il faudra substituer dans les formules les valeurs suivantes

$$\left| \begin{aligned} \omega &= 2\pi, \\ \lambda &= \frac{2\pi}{430}. \end{aligned} \right.$$

Le mouvement du pôle est circulaire et sa demi-amplitude est 0″,1, par suite

$$\varphi = \psi = 0'',1$$

d'où approximativement

$$a = b = \operatorname{tg} \varphi = 2\pi \frac{1}{10 \times 360 \times 60 \times 60}$$

et à cause des équations $(19)_e$ on aura

$$M_1 = M_2 = \frac{4}{10^{10}} C\omega.$$

---

## CHAPITRE VI.

### *Aperçu sur les perturbations dues à la plasticité de la terre.*

#### Article I.

1. Supposons que le mouvement interne soit stationnaire et cherchons les perturbations produites par la plasticité sur le mouvement de rotation que nous connaissons par les études que nous avons faites dans le chapitre précédent.

Nous partirons de l'hypothèse que l'effet du à la plasticité consiste dans la tendance du pôle d'inertie à se rapprocher du pôle de rotation lorsque les deux points ne coïncident pas. Nous discuterons après la loi de ce rapprochement.

2. Envisageons les résultats de l'article III du chapitre précédent lorsque le mouvement interne est stationnaire. On pourra les rapprocher

à ceux qu'on a trouvés dans le chapitre III sur les petites vibrations du pôle autour des positions d'équilibre stable dans l'hypothèse que l'ellipsoïde d'inertie soit un solide de révolution.

Si le mouvement interne est stationnaire les formules $(17)_e$ et $(18)_e$ de l'article III du chapitre V deviennent

$$\begin{cases} p = -\dfrac{\beta_0}{\rho} + C_1 \cos\rho t - C_2 \sin\rho t, \\[2ex] q = \dfrac{\alpha_0}{\rho} + C_1 \sin\rho t + C_2 \cos\rho t, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dfrac{m_1}{A} = -\dfrac{\beta_0}{\omega}, \\[2ex] \dfrac{m_2}{A} = \dfrac{\alpha_0}{\omega} \end{cases}$$

et en posant pour simplifier

$$c_1 = \frac{C_1}{\omega}, \qquad c_2 = \frac{C_2}{\omega},$$

on aura

$$(1)_f \qquad \begin{cases} \dfrac{p}{\omega} = \dfrac{m_1}{A\rho} + c_1 \cos\rho t - c_2 \sin\rho t, \\[2ex] \dfrac{q}{\omega} = \dfrac{m_2}{A\rho} + c_1 \sin\rho t + c_2 \cos\rho t. \end{cases}$$

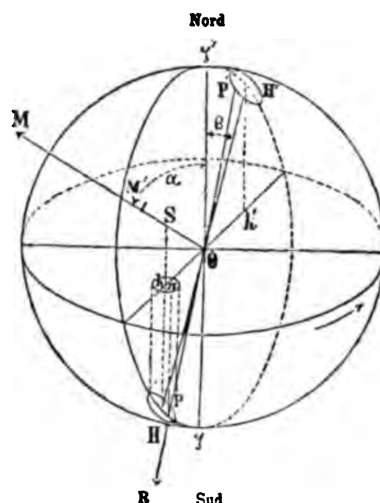
La quantité $\rho$ sera donnée par la formule

$$\rho = \frac{C - A}{A}\omega + \frac{m_3}{A}.$$

3. Pour fixer les idées, supposons que $m_3$ soit une quantité négative, c'est à dire supposons que les projections de l'axe du mouvement interne et de l'axe du couple de quantité de mouvement du à la rotation de la terre, sur l'axe terrestre n'aient pas la même direction. Nous discuterons après comment on doit modifier les formules lorsqu'on suppose que cette hypothèse ne soit pas vérifiée.

Ayant égard qu'une rotation positive a lieu dans le même sens que a rotation des aiguilles d'une montre, nous pouvons conduire les deux

segments $OR$ et $OM$ qui représentent la rotation de la terre et l'axe du mouvement interne en prenant pour origine le centre de la terre. En prolongeant les deux segments dans leurs directions positives ils rencontreront respectivement l'hémisphère sud et l'hémisphère nord.




Cela posé, soit $OP = 1$ un segment ayant la même direction de $OR$. En projetant ce point sur l'équateur en $\pi$, on aura que les projections de $O\pi$ sur les axes $\xi$ et $\eta$ seront $\frac{p}{\omega}, \frac{q}{\omega}$. De même soit $OS = \frac{OM}{A\rho}$ un segment ayant la même direction que $OM$, et soit $h$ la projection de $S$ sur l'équateur.

Les projections de $Oh$ sur les axes $\xi$ et $\eta$ seront $\frac{m_1}{A\rho}, \frac{m_2}{A\rho}$.

Nous pouvons maintenant énoncer d'une manière géométrique la loi représentée par les formules $(1)_f$ en disant: *Le point $\pi$ tourne avec la vitesse angulaire $\rho$ sur une circonférence ayant $h$ pour centre.*

4. Conduisons une sphère ayant $O$ pour centre et dont le rayon soit égal à $1$. Elle rencontrera l'axe $OM$ dans le point $M'$ et l'axe $OR$ dans le point $P$. Puisque ce point est très-proche du pôle d'inertie $\zeta$, nous pouvons par approximation regarder la trajectoire qu'il décrit sur la sphère comme une circonférence ayant pour centre le point $H$ de la sphère qui se projette en $h$ sur l'équateur. Si nous voulons envisager

tous les éléments dans l'hémisphère nord il suffit de construire les points $\zeta'$, $H'$, $P'$ situés dans une position diamétralement opposée aux points $\zeta$, $H$, $P$. Il est évident que les quatre points $P'$, $H'$, $\zeta'$, $M'$ appartiennent à l'hémisphère nord.

Nous les désignerons par les mots: *pôle de rotation, centre du mouvement polaire, pôle d'inertie, centre du mouvement interne.*

Soit $h'$ la projection de $H'$ sur l'équateur. On aura

$$Oh' = Oh,$$

par suite

$$\sin H'\zeta' = Oh = OS \sin M'\zeta',$$

d'où

$$(2)_t \qquad \frac{\sin H'\zeta'}{\sin M'\zeta'} = OS = \frac{OM}{A\rho} = \frac{\sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}}{(C - A)\omega + m_3} = \varepsilon.$$

Posons

$$M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2},$$

nous aurons

$$m_3 = - M \cos M'\zeta',$$

et par conséquent

$$(3)_t \qquad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{M}{(C - A)\omega - M \cos M'\zeta'}, \\ \rho = \dfrac{(C - A)\omega - M \cos M'\zeta'}{A}. \end{cases}$$

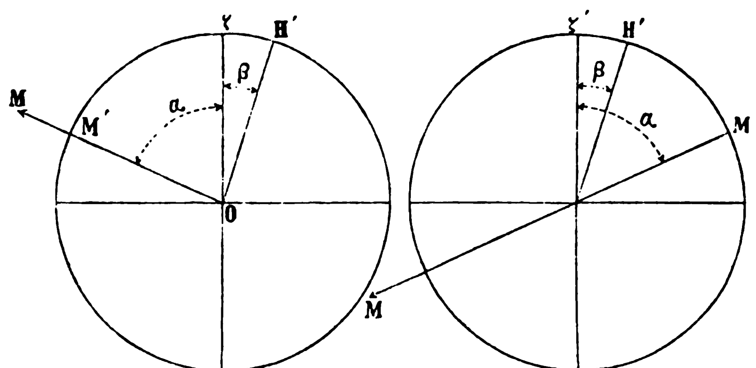
5. Nous avons supposé jusqu'ici que $m_3$ soit une quantité négative; c'est pourquoi on a pris l'intersection de $OM$ avec le sphère sur l'hémisphère nord. Si $m_3$ est positif, prolongeons $MO$ du côté du point $O$ jusqu'à rencontrer l'hémisphère nord en $M'$. On appellera toujours ce point le *centre du mouvement interne.* Lorsque $m_3$ était négatif le point $\zeta'$ était situé entre $M'$ et $H'$, tandis que dans l'hypothèse actuelle $M'$ et $H'$ seront situés du même côté par rapport à $\zeta'$.

Désignons par $\alpha$ et $\beta$ les arcs $\zeta'M'$ et $\zeta'H'$ et prenons leur origine dans le point $\zeta'$. Les équations $(2)_t$ et $(3)_t$ pourront s'écrire

$$(2')_t \qquad \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \mp\varepsilon,$$

$$(3')_t \qquad \left|\begin{array}{l} \varepsilon = \dfrac{M}{(C-A)\omega \mp M\cos\alpha}, \\ \rho = \dfrac{(C-A)\omega \mp M\cos\alpha}{A}, \end{array}\right.$$

et l'on prendra le signe supérieur dans le premier cas ($m_3 < 0$) et le signe inférieur dans le second cas ($m_3 > 0$).




6. En résumant les lois du mouvement du pôle, si l'on suppose les mouvements internes stationnaires, et que l'on néglige la plasticité de la terre, on trouve

1° *Le centre du mouvement interne, le pôle d'inertie et le centre du mouvement polaire sont situés sur un grand cercle de la sphère.*

2° *$\alpha$ et $\beta$ étant les arcs de grand cercle conduits par le pôle d'inertie et les centres du mouvement interne et du mouvement polaire, on a*

$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \mp\varepsilon = \frac{\mp M}{(C-A)\omega \mp M\cos\alpha}.$$

3° *Le pôle de rotation parcourt une circonférence autour du centre du mouvement polaire avec la vitesse angulaire*

$$\rho = \frac{(C-A)\omega \mp M\cos\alpha}{A}.$$

Ces lois représentent d'une manière fort claire l'effet produit par les mouvements internes sur le mouvement du pôle.

En effet s'ils n'existaient pas, le pôle décrirait une circonférence autour du pôle d'inertie avec la vitesse angulaire

$$\frac{C-A}{A}\omega;$$

par suite les mouvements internes ont une double action, savoir:

1° Ils changent le centre de rotation du mouvement polaire qui est repoussé (ou attiré) du centre des mouvements internes le long du grand cercle qui passe par ce point et le pôle d'inertie.

Le déplacement du centre du mouvement polaire est déterminé par l'angle $\beta$.

2° Ils changent la vitesse angulaire de rotation du pôle de

$$\mp\frac{M\cos\alpha}{A}$$

et ce changement correspond à une variation de la période Eulerienne. Nous remarquons enfin que le point $H'$ correspond à un pôle de rotation permanent. Nous renvoyons pour cela au chapitre III où l'on a discuté et approfondi cette question.

**Article III.**

1. Nous allons maintenant déterminer les perturbations auxquelles seront soumises les lois que nous avons énoncées dans l'article précédent, par effet de la plasticité qu'on avait négligée auparavant.

Prenant le point $O$ pour centre de projection, projetons la surface de la terre sur la sphère. Si nous envisageons les phénomènes pendant un intervalle de temps qui ne soit pas trop long, nous pourrons supposer que, même si la terre se déforme à cause de sa plasticité, la configuration des mers et des continents sur la sphère ne change pas sensiblement, mais il faudra supposer que le pôle d'inertie se déplace sur la sphère.

Ce sont donc ces déplacements du pôle d'inertie sur la sphère, la projection de la terre sur la sphère étant fixe, qui décèlent sa plasticité.

On pourra énoncer la propriété que le mouvement interne est stationnaire en disant que le centre du mouvement interne est un point fixe de la sphère et que $M = \sqrt{m_1^2 + m_2^2 + m_3^2}$ est constant.

Nous faisons aussi l'hypothèse que les points $H'$, $P'$, $\zeta'$ se maintiennent toujours très-proches, de manière qu'on puisse négliger les puissances de leurs distances supérieures à la première puissance. Rappelons à ce propos que l'analyse de l'article III du chapitre précédent, dont nous employons à présent les résultats, est appuyée sur cette hypothèse.

Enfin nous supposerons que l'influence de la plasticité se manifeste de manière que le pôle d'inertie tend toujours à s'approcher du pôle de rotation avec une intensité proportionnelle à la distance entre ces points.

D'une façon plus précise nous énoncerons cette loi dans les termes suivants:

*Le pôle d'inertie se déplace à chaque instant dans la direction de l'axe du grand cercle qui passe par ce point et par la position occupée dans le même temps par le pôle de rotation, avec une vitesse proportionnelle à la distance entre ces points.* [1]

Le rapport entre la vitesse du pôle d'inertie dans son mouvement relatif à la sphère et cette distance sera désigné par $\mu$ et nous l'appellerons *coefficient de plasticité.* [2]

Sa valeur sera positive et nous la laisserons indéterminée.

Nous aurons donc $\infty > \mu > 0$. On peut établir dès à présent la signification des cas limites: la valeur $\mu = 0$ correspond au cas de la rigidité complète; et $\mu = \infty$ au cas de l'adaptation immédiate du sphéroide terrestre.

2. Par les hypothèses qu'on vient de faire le problème de la rotation de la terre se présente de la manière suivante:

*On a quatre points situés sur la sphère: $M'$* (centre du mouvement

---

[1] Voir DARWIN, *On the influence of the Geological Changes on the Earth's Axis of Rotation.* Phil. Trans. Roy. Soc., Vol. 167.

[2] Voir SCHIAPARELLI, *De la rotation de la terre sous l'influence des actions géologiques.* Saint-Petersbourg 1889. Nuovo Cimento, T. 30. S. 3^e^. Le cas intermédiaire ne correspond pas complètement à celui que M. SCHIAPARELLI a discuté. Mais en employant la méthode géométrique dont il a fait usage on pourrait l'envisager d'une manière analogue, en ayant égard aux résultats du chapitre précédent. On a adopté l'hypothèse qu'on vient d'énoncer pour simplifier les calculs des articles suivants.

interne), $\zeta'$ (pôle d'inertie), $H'$ (centre du mouvement polaire), $P'$ (pôle de rotation) *qui suivent dans leurs mouvements sur la sphère les lois suivantes:*

1° *$M'$ est un point fixe de la sphère.*

2° *$M'$, $\zeta'$, $H'$ appartiennent à un grand cercle et*

$$\frac{\sin \zeta' H'}{\sin \zeta' M'} = \mp \varepsilon = \frac{\mp M}{(C - A)\omega \mp M \cos \zeta' M'}.$$

3° *$P'$ tourne à chaque instant autour du point $H'$ avec la vitesse angulaire*

$$\rho = \frac{(C - A)\omega \mp M \cos \zeta' M'}{A}.$$

4° *$\zeta'$ se déplace à chaque instant dans la direction tangente à $\zeta' P'$ avec une vitesse égale à $\mu . \zeta' P'$.*

Par ces conditions on pourrait établir tout de suite les équations différentielles du problème. Cependant dans l'article suivant nous le transformerons de manière qu'on pourra l'aborder par une analyse tout à fait élémentaire.

## Article III.

1. Pour simplifier la question dont nous avons parlé à la fin de l'article précédent nous envisagerons une représentation de la terre sur un plan au lieu de la représentation sphérique que nous avons considéré. Pour passer de l'une à l'autre de ces représentations nous employerons la projection stéréographique.

Le plan de projection sera le plan tangent à la sphère dans le point $M'$ et nous prendrons pour centre de projection le point diamétralement opposé de $M'$ que nous désignerons par $M''$.

Le pôle étant en $M'$, soient $\theta$ la colatitude et $\varphi$ la longitude des points de la sphère. Alors le carré de l'élément linéaire de la sphère sera

$$d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2$$

et le carré de l'élément linéaire dans la projection stéréographique sera

$$ds^2 = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$$

d'où l'on tire

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\theta}.$$

On a supposé qu'on puisse négliger les puissances des arcs $\zeta'H'$, $H'P'$, $P'\zeta'$, supérieures à la première puissance.

Cela revient à regarder ces arcs comme des quantités infiniment petites. C'est pourquoi on pourra dire que par la projection stéréographique leurs longueurs ont changé dans le rapport $\frac{1}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}$.

Soient $\zeta_1$, $H_1$, $P_1$ les projections stéréographiques des points $\zeta'$, $H'$, $P'$; nous aurons

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\zeta'H'}{\cos^2 \frac{1}{2}\alpha}.$$

Mais

$$\frac{\sin \zeta'H'}{\sin \alpha} = \mp \varepsilon,$$

par suite, en remplaçant $\sin \zeta'H'$ par l'arc $\zeta'H'$, il viendra

$$\zeta'H' = \mp \varepsilon \sin \alpha$$

d'où

$$\zeta_1 H_1 = \frac{\mp \varepsilon \sin \alpha}{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha} = \mp 2\varepsilon \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha.$$

D'ailleurs on a

$$2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha = \zeta_1 M',$$

donc

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M_1} = \mp \varepsilon.$$

En outre, à cause des propriétés bien connues des projections stéréographiques, on pourra remarquer que $P_1$ tourne autour de $H_1$ avec la vitesse angulaire $\rho$. Par suite les lois que nous avons énoncées dans le 1[er] article, 6[ème] §, lorsqu'on néglige la plasticité, pourront être remplacées par les lois suivantes:

1° *Les projections stéréographiques* $M'$, $\zeta_1$, $H_1$ *du centre du mouvement interne, du pôle d'inertie, et du centre du mouvement polaire sont situées en ligne droite et*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{\zeta_1 M'} = \mp \varepsilon.$$

2° *La projection stéréographique* $P_1$ *du pôle de rotation décrit une circonférence autour du point* $H_1$ *avec la vitesse angulaire* $\rho$.

2. Passons maintenant à déterminer des lois analogues en ayant égard à la plasticité.

A cet effet nous allons transformer les expressions de $\varepsilon$ et de $\rho$.

En posant $\zeta_1 M' = D$, on aura

$$D = 2 \operatorname{tg} \frac{1}{2} \alpha$$

d'où

$$\cos \alpha = \frac{1 - \frac{1}{4} D^2}{1 + \frac{1}{4} D^2}.$$

Par conséquent nous pourrons écrire

$$(3'')_t \quad \begin{cases} \varepsilon = \dfrac{M}{(C-A)\omega \mp M\left(\dfrac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right)}, \\[2ex] \rho = \dfrac{(C-A)\omega \mp M\left(\dfrac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right)}{A}. \end{cases}$$

On tire de là les quatre lois suivantes qu'on pourra substituer aux lois énoncées au § 3 de l'article précédent.

*On a dans un plan quatre points $M'$, $\zeta_1$, $H_1$, $P_1$*
*1° $M'$ est un point fixe.*
*2° $M'$, $\zeta_1$, $H_1$ sont situés en ligne droite et*

$$\frac{\zeta_1 H_1}{D} = \frac{\mp M}{(C-A)\omega \mp M\left(\dfrac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right)};$$

*ayant désigné $\zeta_1 M'$ par $D$.*

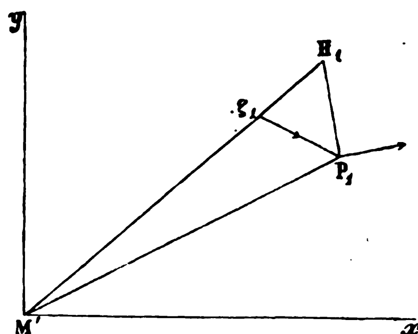
*3° $P_1$ tourne à chaque instant autour du point $H_1$ avec la vitesse angulaire*

$$\rho = (C-A)\omega \mp M\left(\frac{1-\frac{1}{4}D^2}{1+\frac{1}{4}D^2}\right).$$

*4° $\zeta_1$ se déplace à chaque instant dans la direction $\zeta_1 P_1$ avec la vitesse $\mu\delta$, où $\delta$ signifie $\zeta_1 P_1$.*

La dernière loi a été obtenue en remarquant que dans la projection stéréographique les vitesses sont changées dans le même rapport que les arcs infiniments petits.

3. Cela posé, on peut écrire bien aisément les équations différentielles du problème.




Soient $x, y$ des axes orthogonaux fixes par rapport au plan où l'on a fait la représentation stéréographique, situés dans ce plan et ayant pour origine le point $M'$. Désignons par $x, y$ ; $x_1, y_1$ ; $x_2, y_2$ les coordonnées des points $P_1$, $\zeta_1$, $H_1$. La deuxième condition énoncée au paragraphe précédent s'écrira

$$(4)_t \qquad \frac{x_2 - x_1}{-x_1} = \frac{y_2 - y_1}{-y_1} = \mp \varepsilon$$

et la troisième condition

$$(5)_t \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{dx}{dt} = -\rho(y_2 - y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \quad \rho(x_1 - x). \end{array}\right.$$

Le sens de la rotation sera déterminé par l'orientation des axes $x, y$. Enfin de la quatrième condition on déduira

$$(6)_t \qquad \left|\begin{array}{l} \dfrac{dx_1}{dt} = \mu(x - x_1), \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \mu(y - y_1). \end{array}\right.$$

4. A cause des équations $(4)_t$ on aura

$$x_2 = (1 \pm \varepsilon)x_1, \qquad y_2 = (1 \pm \varepsilon)y_1;$$

par suite les équations $(5)_t$ deviendront

$$(5')_t \qquad \left\{\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -\rho[(1 \pm \varepsilon)y_1 - y], \\ \frac{dy}{dt} &= \quad \rho[(1 \pm \varepsilon)x_1 - x]. \end{aligned}\right.$$

On tire de là, en posant $\Delta^2 = x^2 + y^2$,

$$\frac{d\Delta^2}{dt} = 2\left(x\frac{dx}{dt} + y\frac{dy}{dt}\right) = 2\rho(1 + \varepsilon)(x_1 y - y_1 x)$$

ou bien

$$\frac{d\Delta}{dt} = \rho(1 + \varepsilon)\frac{x_1 y - y_1 x}{\Delta}.$$

Remarquons que $\rho$ est une quantité petite et $(x_1 y - y_1 x)$ est le double de l'aire du triangle $M'P_1\zeta_1$, c'est pourquoi le rapport

$$\frac{x_1 y - y_1 x}{\Delta}$$

sera petit du même ordre que $\zeta_1 P_1$, d'où l'on tire que les variations de grandeur de $\Delta$ et par suite de $D$ seront petites. En outre dans les expressions que nous avons trouvées pour $\varepsilon$ et $\rho$ (voir équations $(3'')_t$) le terme

$$M\left(\frac{1 - \frac{1}{4}D^2}{1 + \frac{1}{4}D^2}\right)$$

est petit par rapport à $(C - A)\omega$. Si donc on envisage le mouvement pendant un intervalle de temps qui ne soit trop long on pourra négliger les variations de $\varepsilon$ et de $\rho$ et par suite on pourra les supposer constantes.

Nous avons été conduits aux quatre équations différentielles $(6)_t$, $(5')_t$ qu'on pourra regarder comme des équations différentielles à coefficients constants. Nous consacrerons l'article suivant à leur intégration.

## Article IV.

1. Nous avons réduit dans l'article précédent les équations différentielles du mouvement au système

$$(6)_t \qquad \begin{cases} \dfrac{dx_1}{dt} = \mu(x - x_1), \\ \dfrac{dy_1}{dt} = \mu(y - y_1), \end{cases}$$

$$(5')_t \qquad \begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -\rho[(1 \pm \varepsilon)y_1 - y], \\ \dfrac{dy}{dt} = \rho[(1 \pm \varepsilon)x_1 - x], \end{cases}$$

dans lequel $\rho$ et $\varepsilon$ peuvent être regardés comme des quantités constantes.

Pour l'intégrer posons

$$x = Ce^{zt}, \qquad y = Ke^{zt},$$
$$x_1 = C_1 e^{zt}, \qquad y_1 = K_1 e^{zt},$$

$C$, $C_1$, $K$, $K_1$, $z$ étant des constantes.

Par la substitution des valeurs précédentes on aura

$$(7)_t \qquad \begin{cases} C_1(z+\mu) - C\mu = 0, \\ K_1(z+\mu) - K\mu = 0, \\ Cz + K_1\rho(1 \pm \varepsilon) - K\rho = 0, \\ -C_1\rho(1 \pm \varepsilon) + C\rho + Kz = 0. \end{cases}$$

$z$ sera donc une racine de l'équation de quatrième degré

$$\begin{vmatrix} z+\mu, & -\mu, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & z+\mu, & -\mu \\ 0, & z, & \rho(1 \pm \varepsilon), & -\rho \\ -\rho(1 \pm \varepsilon), & \rho, & 0, & z \end{vmatrix} = 0.$$

Cette équation peut s'écrire aussi de la manière suivante

$$(8)_t \qquad z^4 + 2\mu z^3 + (\mu^2 + \rho^2)z^2 \mp 2\rho^2\mu\varepsilon z + \mu^2\rho^2\varepsilon^2 = 0.$$

Soient $z'$, $z''$, $z'''$, $z^{\text{IV}}$ les racines et $C^{(i)}$, $C_1^{(i)}$, $K^{(i)}$, $K_1^{(i)}$ un système de valeurs de $C$, $C_1$, $K$, $K_1$ qui vérifient les équations $(7)_t$ lorsqu'on prend $z = z^{(i)}$. Nous aurons

$$(9)_t \qquad \begin{cases} x = \sum_1^4 M_i C^{(i)} e^{z^{(i)}t}, \\ y = \sum_1^4 M_i K^{(i)} e^{z^{(i)}t}, \end{cases}$$

$$(10)_t \qquad \begin{cases} x_1 = \sum_1^4 M_i C_1^{(i)} e^{z^{(i)}t}, \\ y_1 = \sum_1^4 M_i K_1^{(i)} e^{z^{(i)}t}, \end{cases}$$

les quantités $M_i$ étant des constantes arbitraires.

2. Pour résoudre l'équation $(8)_t$ posons $\mp \varepsilon = \varepsilon'$. Elle s'écrira alors

$$z^2(z + \mu)^2 + \rho^2(z + \mu\varepsilon')^2 = 0$$

d'où

$$z(z + \mu) \pm i\rho(z + \mu\varepsilon') = 0.$$

Par suite les racines seront

$$z' = \frac{-\mu + u - i(\rho - v)}{2},$$

$$z'' = \frac{-\mu + u + i(\rho - v)}{2},$$

$$z''' = \frac{-\mu - u - i(\rho + v)}{2},$$

$$z^{\text{IV}} = \frac{-\mu - u + i(\rho + v)}{2}$$

où $u$ et $v$ sont donnés par les formules

$$u = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \mu^2 - \rho^2}{2}},$$

$$v = \sqrt{\frac{\sqrt{(\mu^2 + \rho^2)^2 - 16\mu^2\rho^2\varepsilon'(1 - \varepsilon')} + \rho^2 - \mu^2}{2}},$$

les radicaux étant pris dans leurs valeurs absolues.

3. Examinons plus particulièrement les cas limites envisagés dans l'article II, § 2.

Si $\mu = 0$ (c'est à dire dans le cas de la rigidité complète) l'équation $(8)_t$ devient

$$z^4 + \rho^2 z^2 = 0.$$

Deux des racines deviennent égales à $\pm i\rho$ et deux racines s'annulent. Donc le mouvement est périodique et la période est $\frac{2\pi}{\rho}$, c'est à dire on trouve la période eulerienne modifiée de la manière que nous avons vu dans le chapitre précédent.

Soit $\mu = \infty$. En divisant l'équation $(8)_t$ par $\mu^2$ et en faisant après $\frac{1}{\mu} = 0$ on trouve

$$z^2 + \rho^2 \varepsilon^2 = 0.$$

Cela signifie que deux des racines sont infinies et les autres sont $\pm i\rho\varepsilon$. Donc le mouvement est périodique et la période est $\frac{2\pi}{\rho\varepsilon} = \frac{2\pi A}{M}$. Dans ce cas les équations $(6)_t$ deviennent

$$x = x_1, \qquad y = y_1,$$

c'est à dire le pôle d'inertie coïncide avec celui de rotation.

Il viendra à cause des équations $(5')_t$

$$\frac{dx}{dt} = -\rho\varepsilon y = -\frac{M}{A} y, \qquad \frac{dy}{dt} = \rho\varepsilon x = \frac{M}{A} x$$

d'où

$$x = N_1 \cos\left(\frac{M}{A} t + N\right), \qquad y = N_1 \sin\left(\frac{M}{A} t + N\right),$$

$N_1$ et $N$ étant des constantes arbitraires. Le pôle de rotation décrit donc une circonférence autour du centre du mouvement interne avec la vitesse angulaire $\frac{M}{A}$.

Turin le 18 octobre 1897.

# TABLE DES MATIÈRES

# SUR UN NOUVEL ET IMPORTANT THÉORÈME DE LA THÉORIE DES FONCTIONS

PAR

J. L. W. V. JENSEN.

Monsieur le Professeur,

Lors de votre dernier séjour à Copenhague j'ai eu honneur de vous entretenir au sujet d'une intégrale définie appelée, si je ne me trompe, à jouer un rôle dans la théorie des fonctions analytiques. Comme il me parut que cette question vous interéssa vivement, je profiterai de cette occasion — l'envoi des deux petits mémoires[1] destinés à votre Journal — pour vous communiquer le développement détaillé de mon théorème.

Soit $z = re^{\theta i}$ une variable complexe, et $a$ un nombre complexe différent de zéro, on a pour $r < |a|$,

$$l\left(1 - \frac{z}{a}\right) = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{z}{a}\right)^{\nu}$$

où $l$ désigne la valeur principale du logarithme. En prenant les parties réelles des deux membres et en observant que l'on a $\Re(a) = \frac{1}{2}(a + \bar{a})$,[2] on trouve

$$(1) \qquad l\left|1 - \frac{z}{a}\right| = -\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{r^{\nu}}{2\nu}\left(\frac{e^{\nu\theta i}}{a^{\nu}} + \frac{e^{-\nu\theta i}}{\bar{a}^{\nu}}\right), \qquad r = |z| < |a|.$$

---

[1] (1) *Sur les fonctions entières.*

(2) *Note sur une condition nécessaire et suffisante pour que tous les zéros d'une fonction entière soient réels.*

[2] Ici et dans la suite je désigne toujours par $\Re(a)$ la partie réelle et par $\bar{a}$ la valeur conjuguée de $a$.

Si $r > |\alpha|$, on a, par conséquent,

$$(2) \qquad l\left|1-\frac{z}{a}\right| = l\frac{r}{|a|} - \sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{2\nu r^{\nu}}(\alpha^{\nu}e^{-\nu\theta i} + \dot{\alpha}^{\nu}e^{\nu\theta i}), \qquad r > |\alpha|.$$

Si l'on suppose que $r$ soit constant, dans ces équations (1) et (2), les séries des seconds membres convergent uniformément pour toutes les valeurs de l'argument $\theta$. Multiplions les deux membres de (1) et (2) par $\frac{1}{2\pi}e^{-k\theta i}d\theta$, où $k$ désigne un nombre entier positif qui peut être nul, et intégrons de o à $2\pi$; tous les termes s'évanouissent alors, à l'exception du terme constant. On trouve ainsi

$$(3) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\left|1-\frac{z}{a}\right| d\theta = \begin{cases} l\frac{r}{|\alpha|} & \text{pour } r > |\alpha|, \\ 0 & \text{pour } r < |\alpha|, \end{cases}$$

et

$$(4) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l\left|1-\frac{z}{a}\right| e^{-k\theta i} d\theta = \begin{cases} -\frac{1}{2k}\left(\frac{\dot{a}}{r}\right)^k & \text{pour } r > |\alpha|, \\ -\frac{1}{2k}\left(\frac{r}{a}\right)^k & \text{pour } r < |\alpha|. \end{cases}$$

Jusqu'ici nous avons laissé de côté le cas $r = |\alpha|$. Dans ce cas limite les séries en question se confondent et restent encore uniformément convergentes, pourvu que l'on ait soin d'exclure de l'intervalle $(0, 2\pi)$ de $\theta$ un intervalle $(\theta' - \varepsilon, \theta' + \varepsilon)$, $\theta'$ désignant l'argument de $\alpha$. Après l'intégration, les séries, dans les deux cas $k = 0$ et $k > 0$, deviennent

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{2\sin\nu\varepsilon}{\nu^2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}{}'\frac{\sin(k-\nu)\varepsilon}{\nu(k-\nu)} + \frac{1}{2\pi}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{\sin(k+\nu)\varepsilon}{\nu(k+\nu)} - \frac{1}{2\pi}\frac{2\pi-2\varepsilon}{2k}\left(\frac{r}{a}\right)^k$$

respectivement, expressions qui tendent évidemment, pour $\lim \varepsilon = 0$, vers les limites respectives

$$0 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2k}\left(\frac{r}{a}\right)^k.$$

D'autre part la fonction, sur laquelle porte l'intégration dans les premiers membres, devenant seulement logarithmiquement infinie dans le voisinage

de $\theta = \theta'$, les intégrales correspondantes tendent, comme l'on sait, vers des limites déterminées. De la sorte les formules (3) et (4) restent encore valables dans le cas limite, mais les deux formes différentes des seconds membres se confondent en une seule.

Cela posé, nous allons faire une très intéressante application de ces formules à la théorie des fonctions. Soit $f(z)$ une fonction méromorphe dans une partie du plan qui contient à son intérieur le point $z = 0$, point où la fonction ne devra être ni nulle ni infinie. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ tous les zéros et $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ tous les pôles de la fonction situés *à l'intérieur ou sur la circonférence d'un cercle* $|z| = r$ compris tout entier à l'intérieur du domaine donné. Nous supposons, bien entendu, que les zéros et les pôles sont chacun d'eux comptés autant de fois que l'indiquent leurs degrés de multiplicité. Nous aurons donc

$$f(z) = f(0)\frac{\prod_{\nu=1}^{n}\left(1 - \frac{z}{\alpha_\nu}\right)}{\prod_{\nu=1}^{m}\left(1 - \frac{z}{\beta_\nu}\right)} f_1(z), \tag{5}$$

où $f_1(z)$ désigne une fonction de $z$ qui reste méromorphe à l'intérieur du domaine donné et qui est holomorphe à l'intérieur et sur la circonférence du cercle $|z| = r$. Nous voyons, par suite, que l'on a

$$f_1(z) = 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty} A_\nu z^\nu,$$

au moins pour $|z| < R$, $R$ désignant un certain nombre positif plus grand que $r$. Nous pouvons aussi écrire

$$f_1(z) = e^{f_2(z)}$$

où

$$f_2(z) = \sum_{\nu=1}^{\infty} B_\nu z^\nu, \tag{6}$$

pour $|z| < R'$, $R'$ désignant la valeur absolue de l'affixe du plus petit zéro ou pôle situé *à l'extérieur* du cercle $|z| = r$. Prenons maintenant

la partie réelle du logarithme des deux membres de (5), nous obtenons alors par l'intégration en appliquant la formule (3)

$$(7) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l|f(re^{\theta i})|\,d\theta = l|f(0)| + l\frac{r^{n-m}|\beta_1|\cdot|\beta_2|\dots|\beta_m|}{|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\dots|\alpha_n|},$$

car l'intégrale correspondante relative à $f_1(z)$ est nulle, d'après la formule (6) où manque de terme constant.

C'est en cette formule (7) que consiste le nouvel et important théorème que j'avais en vue. D'après les développements précédents il est évident que le théorème subsiste même lorsque $re^{\theta i}$ passe par un nombre quelconque de zéros ou de pôles. Dans le cas spécial où $f(z)$ est une fonction entière, on peut prendre $r$ aussi grand que l'on veut; la formule (7) se réduit alors à la suivante

$$(8) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l|f(re^{\theta i})|\,d\theta = l|f(0)| + l\frac{r^n}{|\alpha_1|\cdot|\alpha_2|\dots|\alpha_n|}.$$

Avant de procéder à quelques-unes des nombreuses applications du théorème, il ne sera pas inutile de jeter un coup d'oeil sur le second membre de (8). Il est évident que cette expression est une fonction *continue* du nombre positif $r$, et cela malgré qu'elle dépende du nombre des zéros compris à l'intérieur du cercle $|z| = r$. On voit aussi, du reste, que la fonction est *continuellement croissante avec* $r$. Dans le cas où la fonction entière n'a pas de zéros situés à l'intérieur du cercle, le second membre de (8) se réduit à son premier terme, qui est constant. Ce fait nous met en possession d'un *critère précieux qui nous renseigne sur l'absence des racines à l'intérieur d'un cercle.* Il est évident aussi que le théorème fondamental de l'Algèbre est un corollaire immédiat de ce que nous venons de démontrer.

Pour montrer avec quelle facilité ce théorème se prête aussi aux recherches de la théorie des fonctions transcendantes entières, soit $f(z)$ une telle fonction, préalablement débarassée par division de toute racine zéro. Soit $e^{\varphi(r)}$ la valeur maxima de $|f(z)|$ sur la circonférence $|z| = r$; il est évident alors que $\varphi(r)$ est une limite supérieure pour $l|f(re^{\theta i})|$, et on trouve, par conséquent

$$(9) \qquad \varphi(r) > K + l\frac{r^n}{a_1 a_2 \dots a_n},$$

$K$ désignant une constante réelle et $a_1, a_2, \ldots, a_n$ les valeurs absolues des zéros, rangées par ordre de grandeurs non décroissante, les zéros étant comptés, comme il a été dit précédemment, avec leurs degrés de multiplicité respectifs. Il est évident que, dans la formule (9), nous pouvons *à fortiori* remplacer $n$ par un entier qui lui est inférieur; de la sorte $n$ ne désignera plus le nombre exact des zéros à l'intérieur où sur la circonférence du cercle $|z| = r$, mais un entier quelconque plus petit que ce nombre. Si nous supposons, bien entendu, que $f(z)$ ait une infinité de zéros, nous pourrons fixer $n$ arbitrairement, et prendre une valeur $r = xa_n$ correspondante, $x$ désignant une constante positive $> 1$, mais d'ailleurs arbitraire. Par conséquent on a

$$\begin{aligned}\varphi(xa_n) &> K + l\frac{a_n^n}{a_1 \ldots a_n} + nlx \\ &> K + nlx.\end{aligned}$$

Donc, si l'on suppose que $\varphi(r) < r^\omega$, $\omega$ désignant une constante positive, on a sur le champ

$$a_n^\omega > \frac{K}{x^\omega} + n\frac{lx}{x^\omega},$$

ce qui fait voir que la série $\sum a_n^{-\omega-\varepsilon}$ est convergente pour $\varepsilon$ positif. Nous avons ainsi trouvé une limite inférieure de $a_n$ regardé comme fonction de $n$. On peut aussi procéder inversement et employer (9) pour la détermination d'une limite inférieure de $\varphi(r)$, en supposant $a_n$ donné. Je vous renverrai pour plus de détails à mon mémoire *Sur les fonctions entières* où je traite cette question d'une manière tout à fait élémentaire à l'aide des premiers principes de la théorie des séries et sans employer le calcul intégral.

Reprenons maintenant la formule (5) et prenons comme auparavant la partie réelle du logarithme des deux membres, mais en multipliant cette fois avant l'intégration par $\frac{1}{2\pi}e^{-k\theta i}$; nous trouvons alors en appliquant les formules (4) et (6)

$$(10)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} l|f(re^{\theta i})|e^{-k\theta i}d\theta = \frac{1}{2k}\left[\sum_{\nu=1}^{m}\left(\frac{\dot{\beta}_\nu}{r}\right)^k - \sum_{\nu=1}^{n}\left(\frac{d_\nu}{r}\right)^k\right] + \frac{r^k}{2}B_k.$$

Nous avons de la sorte calculé le coefficient de $z^k$ dans $f_2(z)$, ce qui permet de déterminer le facteur exponentiel dans les fonctions entières, (*voir* la méthode analogue dans mon mémoire précité).

Avant de terminer cette lettre, je prendrai la liberté de vous rappeler quelques recherches de la théorie analytique des nombres, dont je vous ai parlé il y a plusieurs années. Si je puis trouver le loisir nécessaire, j'espère pouvoir cette année terminer la rédaction de mon mémoire sur les fonctions numériques. Ces recherches ont beaucoup de rapport avec le théorème que je viens d'exposer.

Vous savez, Monsieur, que le problème relatif au nombre des nombres premiers inférieurs à une limite donnée attend encore sa solution rigoureuse, et cela, parceque l'on n'a pu jusqu'ici démontrer que les zéros de la fonction transcendante entière $\xi(t)$ de Riemann sont tous réels. Or, à l'aide de recherches subséquentes sur les séries de Dirichlet, pour lesquelles en 1884[1] déjà j'ai démontré deux théorèmes fondamentaux, et en employant le critère donné plus haut, je suis parvenu à démontrer rigoureusement que $\xi(t)$ n'a pas de zéros à l'intérieur du cercle $|t - ri| = r$. C'est, en d'autres termes, affirmer que toutes les racines de l'équation $\xi(t) = 0$ sont réelles. L'on a surmonté de la sorte le dernier et le plus difficile des obstacles qui s'opposaient à la solution du problème, et il est maintenant aisé de démontrer (comme je le ferai voir dans le mémoire que je prépare) que le nombre des nombres premiers inférieurs à $n$ est

$$\vartheta(n) = \sum_{2}^{n} \frac{1}{l\nu} + \rho_n,$$

où, pour $\lim n = \infty$, $\frac{|\rho_n|}{(\sqrt{n})^{1+\varepsilon}}$ tend vers zéro, $\varepsilon$ désignant une quantité fixe positive aussi petite que l'on veut. D'autre part on démontre très aisément que $\rho_n$ n'est pas d'un ordre plus petit que $\sqrt{n}$, c'est à dire, pour parler d'une manière plus précise, qu'on peut toujours trouver une suite infinie de nombres $n$, pour lesquels

$$|\rho_n| > (\sqrt{n})^{1-\varepsilon}.$$

[1] Voir Tidskrift for Mathematik, Copenhague 1884, p. 70 et 83 et Comptes Rendus, t. 106, p. 834.

# SUR QUELQUES INTÉGRALES AYANT RAPPORTS AVEC LES FONCTIONS ELLIPTIQUES

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG (SUISSE).

Dans un mémoire publié par l'académie de Prague [1] j'ai établi la formule

$$\int_0^\infty e^{-ux\cos\sigma\pi}\sin(s\sigma\pi - ux\sin\sigma\pi)\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^{\frac{1}{\sigma}}} = \pi\sigma e^{-u},$$

en me bornant aux hypothèses $0 < \sigma < \frac{1}{2}$, $u > 0$.

En multipliant les deux membres par $e^{-wu}du$ et en intégrant de $u = 0$ à $u = \infty$, j'en ai déduit la suivante

$$\int_0^\infty \frac{w\sin s\sigma\pi + x\sin(s-1)\sigma\pi}{w^2 + 2wx\cos\sigma\pi + x^2}\frac{x^{s-1}\,dx}{1+x^{\frac{1}{\sigma}}} = \frac{\pi\sigma}{1+w},$$

de laquelle j'ai conclus que la fonction suivante

$$\overline{L}(w, s, \sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{(w^2 + 2wx\cos\sigma\pi + x^2)\left(1 + x^{\frac{1}{\sigma}}\right)}$$

---

[1] $2^{me}$ année, Mémoire N° 9; 1893.

jouit de cette propriété remarquable

$$w \sin s\sigma\pi \,.\, \overline{L}(w\,,s-1\,,\sigma) + \sin(s-1)\sigma\pi \,.\, \overline{L}(w\,,s\,,\sigma) = \frac{\pi\sigma}{1+w}\,.$$

J'ai promis de mettre en évidence ses relations avec les fonctions elliptiques et j'y suis revenu en effet l'année dernière[1] en introduisant la fonction

$$\text{(A)} \qquad L(w\,,s\,,\sigma) = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)(1+x^\sigma)}$$

qui résulte de $\overline{L}$ en changeant $\sigma$ en sa réciproque; celle-ci a par conséquent la propréte

$$\text{(B)} \qquad w\sin\frac{(s+1)\pi}{\sigma} L(w\,,s\,,\sigma) + \sin\frac{s\pi}{\sigma} L(w\,,s+1\,,\sigma) = \frac{\pi}{\sigma(w+1)};$$

j'ai établi une seconde en observant que la quantité

$$Q = L(w\,,s\,,\sigma) + L(w\,,s+\sigma\,,\sigma)$$

s'exprime par l'intégrale

$$Q = \int_0^\infty \frac{x^s\,dx}{w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2}$$

dont la valeur est

$$Q = \frac{\pi w^{s-1}\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi}\,.$$

La seconde relation est donc la suivante

$$\text{(C)} \qquad L(w\,,s\,,\sigma) + L(w\,,s+\sigma\,,\sigma) = \frac{\pi w^{s-1}\sin\frac{s\pi}{\sigma}}{\sin\frac{\pi}{\sigma}\sin s\pi}\,.$$

---

[1] Rozpravy (de Prague), 5[e] année, N° 23, 1896.

Ces deux relations laissent espérer que notre transcendante, jouissant des propriétés assez simples relatives au parallélogramme des périodes $1$ et $\sigma$, aura quelques relations avec des fonctions elliptiques. Pour le montrer, j'établirai d'abord son développement, en vérifiant les propriétés (B) et (C) sur la fonction définie par l'équation suivante

$$\text{(D)} \qquad \frac{\pi e^{\frac{s\pi i}{\sigma}}}{\sigma(1+w)} + \sin\frac{\pi}{\sigma} L(w, s, \sigma)$$
$$= 2\pi i \sin\frac{s\pi}{\sigma}\left[\sum_{\lambda} \frac{w^{s-1} e^{\lambda s\pi i}}{w^{\sigma} e^{\lambda\sigma\pi i} - 1} - \frac{1}{\sigma}\sum_{\mu} \frac{e^{\frac{\mu s\pi i}{\sigma}}}{e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}} + w}\right],$$
$$(\lambda = 1, 3, 5, 7, \ldots; \mu = 2, 4, 6, 8, \ldots).$$

Le calcul étant facile, je me borne à indiquer le domaine d'existence des expressions qu'on vient de considérer. Je supposerai que $w$ soit réel et positif. On voit d'abord que l'intégrale (A) n'existe pas, si la quantité $\sigma$ est purement imaginaire; ensuite, puisque la relation (B) a été obtenue pour $\sigma$ réel et positif, il faut admettre que la partie réelle de $\sigma$ soit positive. Puis, pour que la fonction $\left(w^2 + 2wx\cos\frac{\pi}{\sigma} + x^2\right)^{-1}$ reste finie pendant l'intégration, il faut que la partie réelle de $\frac{1}{\sigma}$ ne soit pas un entier impair, ce qui nous amène à introduire la condition que la partie réelle de $\frac{1}{\sigma}$ soit entre zéro et l'unité. Quant à la quantité $s$, la convergence de l'intégrale exige que sa partie réelle soit plus grande que $-1$ et moindre que celle de la quantité $\sigma + 1$. Dans la bande indéfinie parallèle à l'axe des imaginaires qui est remplie de ces points $s$, la fonction $L(w, s, \sigma)$ est analytique et régulière.

Passons maintenant aux séries (D). La convergence de la première série exige, la partie imaginaire de $\sigma$ étant supposée positive, que la partie imaginaire de $s$ soit également positive; au contraire, la convergence de la deuxième série exige que la partie imaginaire du quotient $\frac{s-1}{\sigma}$ soit positive. On satisfait à toutes ces conditions en supposant que $s$ se trouve à l'intérieur d'une figure qui étant placée dans le demi-plan positif est

limitée par le segment de l'axe $(-1\dots 1)$, puis par la droite $(1\dots\sigma+1)$ et par les deux lignes verticales aux points $s=-1$ et $s=\sigma+1$. Le domaine $(s)$ que nous venons de fixer est assez étendu pourqu'on puisse y placer une infinité des parallèlogrammes des périodes composés des côtés $1$ et $\sigma$.

Cela étant, appelons $\Phi(s).\sin\frac{s\pi}{\sigma}$ la différence des fonctions $L$ définies, l'une par l'intégrale (A), l'autre par l'expression (D), et observons que la fonction $\sin\frac{s\pi}{\sigma}$ ne s'annulant que dans un point du parallélogramme, la fonction $\Phi(s)$ n'a d'autres singularités qu'un seule pôle du premier degré $s=\sigma$; elle satisfait ensuite aux équations déduites de (B) et (C)

$$\Phi(s+1)=-w\Phi(s), \qquad \Phi(s+\sigma)=\Phi(s)$$

qui font voir que la fonction est de la forme

$$\Phi(s)=a\,.\frac{\vartheta_2\left(\frac{s}{\sigma}+\frac{\log w}{2\pi i}\,\middle|\,\frac{-1}{\sigma}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{s}{\sigma}\,\middle|\,\frac{-1}{\sigma}\right)};$$

mais cette fonction-ci ayant aussi le pôle $s=\sigma-1$ où $\Phi(s)$ reste finie, on a nécessairement $a=0$, et les deux fonctions $L(w,s,\sigma)$, définies par les équations (A) et (D), sont égales. Ceci posé, prenons $s=\sigma$ dans l'équation (D); il vient

$$\int_0^\infty\frac{x^\sigma}{1+x^\sigma}\frac{dx}{w^2+2wx\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2}=\frac{\pi}{\sigma\sin\frac{\pi}{\sigma}.(1+w)}.$$

Ensuite, différentions dans l'équation (D) par rapport à $s$ et posons $s=\sigma$; nous aurons le développement

$$\frac{\sigma}{\pi}\int_0^\infty\frac{x^\sigma\log x}{1+x^\sigma}\frac{dx}{w^2+2wx\cos\frac{\pi}{\sigma}+x^2}$$

$$=\frac{2\pi i}{\sin\frac{\pi}{\sigma}}\left[\frac{1}{2\sigma(1+w)}+\sum_\lambda\frac{w^{\sigma-1}e^{\lambda\sigma\pi i}}{1-w^\sigma e^{\lambda\sigma\pi i}}+\frac{1}{\sigma}\sum_\mu\frac{1}{w+e^{\frac{\mu\pi i}{\sigma}}}\right].$$

Remplaçons la parenthèse dans le deuxième membre par son développement

$$\frac{1}{2\sigma(1+w)}+\sum_{\lambda,m}e^{\lambda m\sigma\pi i}w^{m\sigma-1}+\frac{1}{\sigma}\sum_{\mu,m}(-1)^{m-1}w^{m-1}e^{-\frac{\mu m\pi i}{\sigma}};\quad\begin{pmatrix}m=1,2,3,\ldots\\ \mu=2,4,6,\ldots\\ \lambda=1,3,5,\ldots\end{pmatrix}$$

multiplions par $dw$ et intégrons entre zéro et $w$; les séries qui en résultent

$$\frac{1}{2\sigma}\log(w+1)+\frac{1}{\sigma}\sum_{\lambda,m}\frac{w^{m\sigma}}{m}e^{\lambda m\sigma\pi i}+\frac{1}{\sigma}\sum_{\mu,m}(-1)^{m-1}\frac{w^m}{m}e^{-\frac{\mu m\pi i}{\sigma}}$$

s'expriment par des logarithmes et on obtient l'équation

$$\frac{\sigma^2}{2\pi^2 i}\int_0^\infty\frac{x^{\sigma-1}\log x}{1+x^\sigma}\left[\operatorname{arc\,tg}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma}+\frac{w}{x}\operatorname{cos\acute{e}c}\frac{\pi}{\sigma}\right)+\frac{\pi}{\sigma}-\frac{\pi}{2}\right]dx$$

$$=\log\left\{\sqrt{1+w}\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1+we^{-\frac{2m\pi i}{\sigma}}}{1-w^\sigma e^{(2m-1)\sigma\pi i}}\right\}.$$

Elle fait voir que les transcendantes en $\sigma$

$$\prod_{m=1}^{\infty}\left(1+we^{-\frac{2m\pi i}{\sigma}}\right),\qquad\prod_{m=1}^{\infty}\left(1-w^\sigma e^{(2m-1)\sigma\pi i}\right)$$

qui ont l'axe des quantités réelles pour coupure, ont un quotient qui s'y comporte régulièrement. Cette relation qui nous paraît intéressante se simplifie en changeant $w$ en $\frac{1}{w}$ et en ajoutant; on aura au deuxième membre l'expression

$$\log\frac{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+we^{-\frac{2n\pi i}{\sigma}}\right)\left(1+\frac{1}{w}e^{-\frac{2n\pi i}{\sigma}}\right)}{\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-w^\sigma e^{(2n-1)\sigma\pi i}\right)\left(1-w^{-\sigma}e^{(2n-1)\sigma\pi i}\right)}$$

qu'on peut écrire d'après les définitions bien connues

$$\log\frac{e^{\frac{\pi i}{4\sigma}}\vartheta_2\left(\frac{\log w}{2\pi i}\middle|\frac{-1}{\sigma}\right)}{\vartheta_0\left(\frac{\sigma\log w}{2\pi i}\middle|\sigma\right)},$$

ou en faisant usage de la formule de transformation,

$$\log\left\{\sqrt{\frac{\sigma}{i}}\, e^{\frac{\pi i}{4\sigma}-\frac{\sigma i}{4\pi}(\log w)^2}\right\}.$$

La formule dont il s'agit sera donc

$$\frac{\sigma^2}{2\pi^2 i}\int_0^\infty \frac{x^{\sigma-1}\log x}{1+x^\sigma}\left\{\operatorname{arctg}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma}+\frac{w}{x}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\left(\cot\frac{\pi}{\sigma}+\frac{1}{wx}\operatorname{cosec}\frac{\pi}{\sigma}\right)+\frac{2\pi}{\sigma}-\pi\right\}dx$$

$$=\log\left\{\sqrt{\frac{\sigma}{i}}\, e^{\frac{\pi i}{4\sigma}-\frac{\sigma i}{4\pi}(\log w)^2}\right\}.$$

---

# SUR LA NATURE ANALYTIQUE D'UNE FONCTION CONSIDÉRÉE PAR P. DU BOIS-REYMOND

PAR

M. LERCH

À FRIBOURG (SUISSE).

[Extrait des »Monatshefte für Mathematik und Physik» 8ème année.]
Traduit par L. Laugel.

Dans le tome 21 des Mathematische Annalen PAUL DU BOIS-REYMOND parle de séries infinies de la forme

$$\sum_{p=1}^{\infty} \mu_p \sin px$$

dont les coefficients remplissent des conditions infinitaires déterminées, et il cite notamment le cas $\mu_p = e^{-\sqrt{p}}$. Cette série possède des dérivées de tous les ordres et d'après DU BOIS-REYMOND elle ne peut être prolongée dans le domaine de l'imaginaire.

Il en résulterait que la série infinie de puissances

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-\sqrt{m}} u^m$$

aurait sa région de convergence — le cercle de rayon unité décrit autour de l'origine comme centre — aussi pour région d'existence. Cela est en tout cas bizarre et a été contesté par M. PRINGSHEIM (Math. Annalen, t. 44); ce géomètre s'est contenté de présenter quelques observations à ce sujet, sans résoudre la question même, bien qu'il soit possible de le faire d'une manière excessivement simple, comme nous voulons ici le faire voir.

Soit d'abord $u$ une variable complexe dont la valeur absolue est plus petite que $1$, et soit $a$ une grandeur réelle positive; alors la série infinie

$$\sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^m$$

est absolument convergente. Pour voir comment elle se comporte sur le contour du cercle de convergence $|u| = 1$, et, d'une manière générale, pour reconnaître la nature analytique de cette transcendante, nous emploierons la formule intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{am}};$$

nous ne nous attarderons pas ici à la vérification de l'équation

$$\sum_{m=1}^{\infty} u^m \int_0^{\infty} e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \int_0^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} u^m e^{-mx-\frac{a}{x}} \frac{dx}{x\sqrt{x}},$$

mais nous passerons à la considération du résultat

$$(1) \qquad \sqrt{\frac{1}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} u^{m-1} e^{-2\sqrt{am}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

Nous obtenons ainsi pour la fonction analytique

$$(2) \qquad \Phi(u) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-2\sqrt{am}} u^{m-1}, \qquad (|u| < 1),$$

une représentation intégrale

$$(3) \qquad \Phi(u) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

dont le prolongement nous est fourni directement.

En effet cette intégrale existe pour toutes les valeurs $u$, qui, sur le plan de la variable complexe, sont représentées par des points en dehors

de la coupure $(1 \dots \infty)$ pratiquée le long de l'axe des grandeurs réelles, et dans cette région l'intégrale a évidemment le caractère d'une fonction entière.

Il s'ensuit que notre fonction (2) peut être prolongée dans tout le plan des $u$, à l'exception, faite provisoirement, de la coupure $(1 \dots \infty)$.

Son développement en série de puissances dans le domaine du point $u = i$ s'obtient au moyen de la formule (3), et l'on a

$$\Phi(u) = \sum_{\nu=0}^{\infty} A_\nu (u - i)^\nu$$

où

$$A_\nu = \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{(e^x - i)^{\nu+1}} \frac{dx}{x\sqrt{x}}.$$

On a évidemment

$$|A_\nu| < \int_0^\infty e^{-\frac{a}{x} - (\nu+1)x} \frac{dx}{x\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\, e^{-2\sqrt{a(\nu+1)}},$$

et la série converge pour $|u - i| < 1$, comme c'était clair de prime abord.

Nous nous proposons maintenant de démontrer que la fonction $\Phi(u)$ se comporte aussi d'une manière régulière le long de la coupure $(1 \dots \infty)$, exception faite du seul point $u = 1$.

En effet soit $L$ une ligne issue de l'origine et s'étendant dans le voisinage de l'axe des grandeurs réelles sur le plan de la variable complexe $x$, jusqu'à l'infini. Alors la fonction

$$\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

se comporte régulièrement dans la région qui a pour contour la courbe $L$ et l'axe des grandeurs réelles, et l'intégrale

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

qui correspond au chemin d'intégration $L$ est égale à l'intégrale $\Phi(u)$. Mais celle-ci exige pour la fixation précise de sa région de convergence une coupure (définie par les points $u = e^x$) tout à fait différente de la précédente et elle se comporte régulièrement en tous les points de la ligne $(1 \ldots \infty)$, à l'exception seule de $u = 1$.

Il n'est pas difficile de reconnaître le mode de discontinuité de $\Phi(u)$ au point $u = 1$. Soit de nouveau $\Phi(u)$ l'intégrale (3) et soit $v > 1$ une grandeur réelle et $\varepsilon'$, $\varepsilon''$ deux petites grandeurs positives; si l'on pose

$$u' = v + \varepsilon' i, \qquad u'' = v - \varepsilon'' i$$

il est facile de démontrer à l'aide d'une méthode de raisonnement inventée par M. HERMITE et simplifiée par M. GOURSAT [1] que

$$\lim_{\varepsilon'=0,\, \varepsilon''=0} [\Phi(u') - \Phi(u'')] = 2\pi i \frac{e^{-\frac{a}{\log u}}}{u(\log u)^{\frac{3}{2}}}.$$

Il résulte de là comme conséquence que la fonction

$$\Phi(u) + e^{-\frac{a}{\log u}} \frac{\log(u-1)}{u(\log u)^{\frac{3}{2}}} = \Psi(u) \tag{4}$$

reste uniforme dans le domaine du point $u = 1$, et ainsi est développable suivant les puissances positives et négatives de $(u - 1)$.

Le nombre des puissances négatives qui se présentent dans ce développement est nécessairement infiniment grand. En effet si $\varepsilon$ désigne une grandeur positive infiniment petite, évidemment $\Psi(1 - \varepsilon)$ est alors infiniment grand, puisque $\Phi(1 - \varepsilon)$ reste fini et que le second terme dans (4) au premier membre devient infiniment grand, et d'autre part $\Psi(1 + \varepsilon)$ reste finie pour $\varepsilon$ infiniment petit. Pour démontrer ce dernier point il suffit de faire voir que l'intégrale

$$\int_L \frac{e^{-\frac{a}{x}}}{e^x - u} \frac{dx}{x\sqrt{x}}$$

[1] Voir Acta mathematica, tome 1, p. 189—192: *Lettre de M. Hermite* et Acta mathematica, tome 10, Table: GOURSAT, où se trouve la liste des travaux de M. HERMITE sur les sujets de la Lettre de M. GOURSAT.

reste finie pour $u = 1 + \varepsilon$; c'est ce que l'on voit clairement en la ramenant à la forme

$$\Phi(u) = -\frac{1}{u}\int_L \log(1 - e^{-x}u)\, d\frac{e^{-\frac{a}{x}}}{x\sqrt{x}}.$$

Maintenant, comme les expressions $\Psi(u \pm \varepsilon)$ ne sont ni toutes les deux finies, ni toutes les deux infiniment grandes, alors $u = 1$ est un point singulier essentiel de la fonction $\Psi(u)$ et dans le développement en série de puissances

$$\Psi(u) = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (u - 1)^\nu$$

le nombre des puissances négatives qui se présentent effectivement est nécessairement infiniment grand, ainsi qu'il a été affirmé.

»La fonction $\Phi(u)$ définie par la série (2) se comporte régulièrement en tous les points de la circonférence du cercle $|u| = 1$, à l'exception du point $u = 1$. Ce dernier point est un point singulier et la manière dont la fonction se comporte dans le domaine du point $u = 1$ peut se définir par la formule suivante

$$\Phi(u) = -e^{-\frac{a}{\log u}} \frac{\log(u - 1)}{u (\log u)^{\frac{3}{2}}} + \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} A_\nu (u - 1)^\nu.«$$

La construction d'exemples de fonctions à lignes singulières ne peut avoir après les travaux de WEIERSTRASS qu'un but pédagogique. A ce point de vue, il y a dix ans, j'ai étudié un grand nombre d'expressions; mais par suite du nombre restreint de lecteurs des publications de la Société royale des Sciences de Prague mes recherches sont restées très peu connues, et même mon mémoire sur l'impossibilité de différentier certaines fonctions, qui a été publié dans le Journal de Crelle, tome 103, n'a pas attiré l'attention de M. MITTAG-LEFFLER.[1]

---

[1] *Sur une transcendante remarquable trouvée par* M. FREDHOLM, Acta mathematica, t. 15. La série traitée à la fin de mon mémoire fournit évidemment une fonction de la même propriété que la série de M. FREDHOLM.

Notamment dans mon mémoire *Sur les fonctions à région d'existence bornée*[1] sont indiquées de nombreuses expressions de cette catégorie, ainsi que de nouvelles méthodes de démonstration et de nouvelles généralisations. Par exemple, il y est démontré que la série à double entrée

$$\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\nu=0}^{\infty}\binom{m}{\mu}\binom{n}{\nu}a^{\mu\nu}u^{\mu}x^{\nu}$$

ne peut être prolongée au delà de sa région de convergence $|u|<1$, $|x|<1$, lorsque les constantes $m, n$ ne sont pas des nombres entiers positifs, et lorsque la constante $a$ a pour valeur absolue l'unité mais n'est pas une racine de l'unité.

De ce qui se trouve dans ce mémoire beaucoup a été nouvellement publié par M. PRINGSHEIM dans les Math. Annalen, tomes 42 et 44, par exemple la généralisation qu'il cite en note au bas de la page 166 du tome 42, et encore le principe de démonstration qu'il emploie p. 50 et p. 51 du tome 44. C'est aussi à moi que remonte cette remarque que l'on peut construire des expressions de la forme

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu}{x-a_\nu}$$

qui, en valeur absolue, restent inférieures à une constante, lorsque $x$ est limité à une région à l'intérieur de laquelle ne sont pas situés des points $a_\nu$, et il en est de même aussi pour le contour de la région quand tous les points de ce contour sont des points limites [*Häufungsstellen* d'après la terminologie de M. G. CANTOR] de l'ensemble $(a_\nu)$. C'est ce que j'ai éclairci p. 7 de mon mémoire au moyen de l'exemple

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}\frac{c_\nu\left(e^{\frac{1}{\nu}}-1\right)}{x-e^{\frac{1}{\nu}+2\nu a\pi i}}, \qquad (|x|\leq 1),$$

où $\alpha$ désigne une grandeur réelle irrationnelle. M. PRINGSHEIM au tome 42 des Math. Annalen cite beaucoup d'expressions de ce type.

---

[1] Mémoires de l'Acad. royale des Sc. de Bohème, VII. Suite. Tome II, 1888.

M. PRINGSHEIM voulait pousser la question plus loin, et il affirme que l'expression

$$f(x) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{c_\nu}{x - a_\nu}, \qquad (\Sigma |c_\nu| \text{ est convergente})$$

ne peut être prolongée au delà du domaine $C$ lorsque tous les points $a_\nu$ sont situés en déhors de $C$, mais cela de telle sorte cependant que leurs points limites forment le contour de $C$, sous la supposition que les $a_\nu$ ne récouvrent aucune portion de surface d'une manière partout dense.

En 1887, je n'ai pas voulu aller aussi loin que M. PRINGSHEIM et je n'ai pas tenté de résoudre la question, car la démonstration me sembla alors et me semble encore aujourd'hui difficile, de sorte que je ne puis ici rien fournir en réponse à la question. Lorsque M. PRINGSHEIM croit en avoir trouvé la solution au moyen de son théorème (p. 168 du t. 42 des Math. Annalen) il se trompe, car la démonstration de ce théorème est fausse et l'exactitude de ce théorème reste donc indécise.

---

# SUR UNE PROPRIÉTÉ DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES INTÉGRABLES À L'AIDE DES FONCTIONS MÉROMORPHES DOUBLEMENT PÉRIODIQUES

PAR

MICHEL PETROVITCH

à BELGRADE.

Etant donné un type général d'équations différentielles

$$F(y\,,y'\,,y''\,,\ldots\,,y^{(p)})=0 \tag{1}$$

d'un ordre quelconque, ne contenant pas $x$ explicitement, on peut se proposer à préciser les équations appartenant à un tel type, qui peuvent être satisfaites par des fonctions méromorphes doublement périodiques. J'indiquerai ici une propriété de telles équations qui permet, sans entrer dans des études plus approfondies, de simplifier le problème en question et qui se traduit par une règle très simple et pratique.

Supposons l'équation écrite sous la forme

$$\sum_{i=1}^{i=s} P_i y^{m_{0i}} y'^{m_{1i}} y''^{m_{2i}} \ldots y^{(p)m_{pi}} = 0 \tag{2}$$

où les $m$ sont des entiers positifs, tels qu'on n'ait pas à la fois pour deux indices $i$ et $j$ différents

$$m_{0i}=m_{0j}, \qquad m_{1i}=m_{1j}\ , \quad \ldots\ , \quad m_{pi}=m_{pj}$$

et les $P_i$ sont des constantes.

Formons les $2s$ nombres entiers et positifs suivants

$$\begin{aligned} M_i &= m_{0i} + \ \ m_{1i} + \ldots + \ \ m_{pi}, \\ N_i &= m_{1i} + 2m_{2i} + \ldots + pm_{pi}. \end{aligned} \tag{3}$$

*Acta mathematica*. 22. Imprimé le 6 juin 1899.

Traçons dans le plan deux axes, celui des $M$ et des $N$, et marquons les $s$ points $(M_i, N_i)$ en ayant soin d'inscrire à côté de chacun d'eux son indice. Si deux on plusieurs points coïncident, on mettra à côté d'un tel point multiple les indices de tous les points qui y sont confondus.

Construisons la ligne polygonale $\Pi$ concave vers $OM$, contenant à son intérieur ou sur sa périphérie tous les points $(M_i, N_i)$ et fermée par des droites perpendiculaires à l'axe $ON$, dans le cas où il n'y a pas de sommets sur cet axe. Posons pour abréger

$$(4) \qquad \begin{aligned} \gamma_{0i} &= m_{1i} + m_{2i} + \ldots + m_{pi}, \\ \gamma_{1i} &= m_{2i} + m_{3i} + \ldots + m_{pi}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \gamma_{hi} &= m_{h+1,i} \qquad + \ldots + m_{pi} \end{aligned}$$

et ensuite

$$(5) \qquad A_i = \lambda^{\gamma_{0i}}(\lambda - 1)^{\gamma_{1i}}(\lambda - 2)^{\gamma_{2i}} \ldots (\lambda - p + 1)^{\gamma_{p-1,i}}$$

où $\lambda$ est un nombre arbitraire.

Il peut arriver que la ligne polygonale $\Pi$ présente un ou plusieurs sommets dans lesquels deux ou plusieurs points $(M_i, N_i)$ coïncident; nous les appellerons alors les *sommets multiples.* Envisageons un tel sommet multiple et soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ les indices des termes de $F$ qui y sont confondus. Formons l'équation

$$(6) \qquad A_{\alpha_1}P_{\alpha_1} + A_{\alpha_2}P_{\alpha_2} + \ldots + A_{\alpha_n}P_{\alpha_n} = 0;$$

elle sera une équation en $\lambda$ de la forme

$$\lambda^m + a_1\lambda^{m-1} + a_2\lambda^{m-2} + \ldots + a_{m-1}\lambda + a_m = 0$$

que nous appellerons *équation en* $\lambda$ relative au sommet multiple $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. A chaque sommet multiple correspond une équation en $\lambda$ définie par (6).

Ceci étant, il peut arriver que l'équation différentielle (1) admet des intégrales méromorphes doublement périodiques. *Dans ce cas elle jouit des propriétés suivantes:*

I. *La ligne polygonale $\Pi$ a au moins un côté à coefficient angulaire égal à un nombre entier négatif, ou bien elle a au moins un sommet multiple*

*tel, que son équation en $\lambda$ admet comme racines un ou plusieurs nombres entiers négatifs, compris entre les valeurs des coefficients angulaires de deux côtés aboutissant à ce sommet.*

Car une fonction méromorphe doublement périodique ne saurait rester holomorphe dans tout le plan, et au voisinage d'un pôle $x = a$ peut s'écrire

$$y = (x - a)^{\mu} f(x), \tag{7}$$

où $\mu$ est un entier négatif et $f(x)$ une fonction holomorphe au voisinage de $x = a$ et ne s'annulant pas pour cette valeur de $x$. D'autre part j'ai démontré antérieurement (*Thèse de doctorat*) le résultat suivant: si $\mu$ a une valeur déterminée, pour que $y$, définie par (7), puisse satisfaire à une équation différentielle (1), il faut ou bien que $\mu$ soit égal à un des coefficients angulaires des côtés de la ligne polygonale $\Pi$, correspondant au polygone $F$, ou bien que $\mu$ satisfasse à une des équations en $\lambda$ relatives aux sommets multiples de $\Pi$ et soit compris entre les valeurs des coefficients angulaires de deux côtés aboutissant à ce sommet.

La proposition I s'en déduit immédiatement.

II. *Quelle que soit la fraction rationnelle $R(y)$ en $y$, la transformée*

$$\Phi(z, z', z'', \ldots, z^{(p)}) = 0 \tag{8}$$

*de $F = 0$ en $z = R(y)$ jouit des propriétés énoncées dans la proposition* I.

Car, $y$ étant une fonction méromorphe doublement périodique, $z$ l'est aussi.

Remarquons en même temps, que si les conditions I ne sont pas remplies pour une transformée (8) correspondant à une fraction rationnelle $R(y)$ ayant plus de deux pôles distincts, *l'équation $F = 0$ n'admet aucune intégrale méromorphe.* Car l'équation $\Phi = 0$ ne satisfaisant pas aux conditions I, son intégrale $z$, qui sera aussi méromorphe si $y$ l'est, ne saurait devenir infinie pour aucune valeur finie de $x$. Par suite si $a$, $b$, $c$ sont trois pôles distincts de $R(y)$ en $y$, les trois équations

$$y - a = 0, \qquad y - b = 0, \qquad y - c = 0$$

n'ont pas de racines finies. Par suite, en vertu du théorème connu de M. Picard, l'intégrale $y$, supposée méromorphe, se réduirait à une constante.

III. *Si l'on forme une combinaison rationnelle*

$$R(y, y', y'', \ldots, y^{(q)})$$

*de $y$ et des ses dérivées successives, telle que la transformée*

$$\Psi(z, z', z'', \ldots, z^{(q)}) = 0 \tag{9}$$

*de $F = 0$ en*

$$z = R(y, y', y'', \ldots, y^{(q)}) \tag{10}$$

*ne satisfasse pas aux conditions de la proposition* I, *l'équation*

$$R(y, y', y'', \ldots, y^{(q)}) = const. \tag{11}$$

*joue le rôle d'intégrale première pour les intégrales méromorphes doublement périodiques de $F = 0$ en ce sens que toute intégrale de telle nature satisfait en même temps à l'équation $R = const.$*

Il suffit, pour démontrer la proposition, de remarquer que $y$ étant méromorphe doublement périodique, $z$ le sera aussi et que toute fonction de telle nature n'ayant pas de pôles, se réduit à une constante.

La considération des lignes polygonales $\Pi$ et des équations en $\lambda$ correspondantes donne donc un moyen de former d'intégrales premières relatives aux intégrales méromorphes doublement périodiques de l'équation différentielle donnée. Une fois ces intégrales premières connues, la recherche des intégrales en question se ramène à celle des solutions communes à deux équations différentielles données, ce qu'on fera par différentiations et élimination des dérivées successives de $y$. Si p. ex. $p > q$, on différentiera l'équation $R = const.$ $p - q$ fois par rapport à $x$ et en éliminant $y^{(p)}$ entre

$$F = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^{p-q} R}{dx^{p-q}} = 0 \tag{2}$$

on aura une équation (3) d'un ordre inférieur à $p$, admettant toutes les solutions communes à (1) et (2). En opérant sur (2) et (3) comme sur (1) et (2), on remplacera l'une de ces équations par une autre d'un ordre moindre et ainsi de suite. On obtiendra ainsi une suite

$$(\Delta) \qquad (1)\,,\,(2)\,,\,(3)\,,\,\ldots\,,\,(m-2)\,,\,(m-1)\,,\,(m)\ldots$$

d'équations différentielles. Si l'équation $F=0$ admet effectivement d'intégrales méromorphes doublement périodiques ne se réduisant pas à des constantes, on pourra toujours choisir la constante figurant dans l'intégrale première $R=const.$ de sorte que les équations de la suite $(\Delta)$ à partir d'un certain rang $m$ se réduisent à des identités. Toute intégrale commune à $F=0$ et $R=const.$ est alors intégrale de l'équation $(m-1)$. Pour que $F=0$ admette d'intégrales méromorphes doublement périodiques, il faut et il suffit que l'équation $(m-1)$ en admette et que parmi ces intégrales il y en ait qui satisfassent à $F=0$. La recherche des intégrales de telle nature se trouve ainsi ramenée à celle relative à une équation d'un ordre moindre.

Si en particulier l'équation $(m-1)$ ne contient que $y$ et $y'$, cette recherche s'achève facilement par les méthodes de Briot et Bouquet.

Ces propositions permettent dans un grand nombre de cas de simplifier la recherche des conditions pour qu'un type donné d'équations différentielles admette d'intégrales méromorphes doublement périodiques.

P. ex. en remarquant que la ligne polygonale de l'équation

$$P(y'')=Q(y)$$

où $P$ et $Q$ sont des polynomes de degrés respectifs $m$ et $n$, ne peut présenter qu'un seul côté à coefficient angulaire négatif et que ce coefficient est égal à

$$\frac{2m}{n-m},$$

on voit que l'équation ne saurait admettre d'intégrales méromorphes doublement périodiques que si $n$ est de la forme

$$n=m+\frac{2m}{k},$$

où $k$ est un diviseur de $2m$. Elle en admettra effectivement p. ex. si $m = 1$, $n = 2$ ou $3$, les coefficients des polynomes $P$ et $Q$ étant quelconques; ou encore si $m = 2$, $n = 4$ ou $6$, les coefficients étant convenablement choisis etc.

Plus généralement, pour que l'équation

$$P(y^{(p)}) = Q(y)$$

puisse admettre d'intégrales en question, il faut que $n$ soit de la forme

$$n = m + \frac{mp}{k},$$

où $k$ est un diviseur de $mp$.

En remarquant aussi que la ligne polygonale de l'équation

$$P(y^{(p)}) = Q(y)y'$$

est à un seul coefficient angulaire et que celui-ci est égal à

$$\frac{mp - 1}{n + 1 - m},$$

on voit que l'existence des intégrales méromorphes doublement périodiques exige qu'on ait

$$n = m - 1 + \frac{mp - 1}{k},$$

$k$ étant un diviseur de $mp - 1$. Elle sera effectivement intégrable par de telles fonctions p. ex. si, les coefficients de $P$ et $Q$ étant quelconques, on a $p = 3$, $m = 1$, $n = 1$ ou $2$ etc.

S'il s'agit des équations de Briot et Bouquet

$$F(y, y') = 0,$$

pour qu'une telle équation puisse être intégrable par des fonctions méromorphes doublement périodiques, il faut que sa ligne polygonale admette au moins un côté à coefficient angulaire entier négatif et au moins un à coefficient angulaire entier positif et qu'il n'y ait pas de côtés à coefficient angulaire fractionnaire. Cette proposition simplifie souvent considérablement la question de préciser les équations, appartenant à un type général donné d'équations pouvant admettre d'intégrales de la nature

considérée. Elle resulte immédiatement d'une part de ce fait qu'une fonction méromorphe doublement périodique ne saurait rester holomorphe dans tout le plan et doit s'annuler pour un nombre illimité de valeurs de $x$, et d'autre part de la proposition suivante, que j'ai démontré dans un travail antérieur: pour que $y$ défini par

$$y = (x - a)^{\mu} f(x),$$

où $f$ est une fonction holomorphe au voisinage de $x = a$ et ne s'annulant pas pour cette valeur de $x$, satisfasse à une équation

$$F(y, y') = 0,$$

il faut et il suffit que $\mu$ soit égal à un coefficient angulaire des côtés de la ligne polygonale correspondant à l'équation différentielle considérée.

Remarquons aussi que, d'après cette même proposition, pour qu'une équation de Briot et Bouquet irréductible puisse être intégrable par des fonctions méromorphes en général, il faut que la ligne polygonale de l'équation n'ait aucun côté à coefficient angulaire fractionnaire et qu'elle ait au moins un côté à coefficient angulaire différent de zéro. Car, s'il n'en était pas ainsi, l'équation ne pouvant être intégrable par d'autres fonctions méromorphes que par les fonctions rationnelles ou simplement périodiques et ne pouvant s'annuler ni être infinie pour aucune valeur finie de $x$, se réduirait à une constante ou bien à une ou plusieurs fonctions de la forme

$$He^{ax},$$

et dans ce dernier cas le premier membre de l'équation serait décomposable en facteurs de la forme

$$y' + ay,$$

où $a$ est une constante.

D'ailleurs si ces conditions nécessaires pour l'existence des intégrales méromorphes sont remplies pour l'équation donnée, mais que la ligne polygonale n'admet aucun côté à coefficient angulaire négatif ou aucun côté à coefficient angulaire positif, ou s'assure aisément si l'équation admet ou non d'intégrales méromorphes. Car dans ce cas l'intégrale ne pouvant être que rationnelle ou simplement périodique, elle ne saurait, dans le premier cas avoir des pôles et dans le second cas des zéros. Par suite,

dans le premier cas elle se réduirait à un polynome en $x$ ou en $e^{ax}$ et dans le second cas c'est la transformée de l'équation donnée en $\frac{1}{y}$ qui doit se réduire à un tel polynome et l'on achève facilement la question en déterminant, par la méthode des coefficients indéterminées, le degré et les coefficients d'un tel polynome.

4 mars 1898.

# INHALTSVERZEICHNISS. — TABLE DES MATIÈRES.

## BAND 22. — 1898—1899. — TOME 22.

Ce cahier était déjà livré à la distribution quand nous est arrivée la nouvelle douloureuse de la mort de **Sophus Lie**, arraché à la science le 18 février 1899.

Sophus Lie appartenait à la rédaction de ce journal depuis sa fondation à la fin de l'année 1882. C'était même lui qui avait le premier compris que l'époque était venue d'éditer un grand journal mathématique scandinave. C'est lui qui dans une entrevue que nous eûmes à Stockholm au printemps de 1882 me proposa de tenter cette entreprise et de la diriger moi-même comme rédacteur en chef du nouveau journal. Il me promettait d'apporter à cette entreprise le concours de son influence et de sa collaboration; à cette promesse je n'ai jamais fait appel, par la suite, sans être entendu.

Une plume plus compétente que la mienne retracera bientôt dans ce journal l'oeuvre mathématique de Sophus Lie.

La force intérieure qui a surtout dirigé ses travaux était un amour enthousiaste, jeune et vigoureux de la théorie si vaste qui portera toujours la marque de son génie. Il a voulu faire de la théorie des groupes de substitutions une théorie embrassant les mathématiques entières, et trouver, dans cette théorie, l'explication des phénomènes les plus cachés de l'analyse et de la géométrie. C'était un fils d'une de ces races jeunes, qui ont une foi ardente dans leur destinée et qui puisent dans cette foi la force d'accomplir en une vie d'homme l'oeuvre d'un siècle.

Il a eu le bonheur de trouver des collaborateurs dévoués et généreux, et de pouvoir, grâce à eux, dire toute sa pensée dans ces oeuvres très développées qui ne laissent plus de difficultés à ceux qui veulent s'assimiler ses théories.

Pour trouver les concours indispensables à la publication de son oeuvre et pour répandre plus largement ses doctrines, il n'a pas hésité,

lui qui aimait tant son pays, — ce pays qui a vu naître Abel, — il n'a pas hésité à s'expatrier pendant des années. Sa tâche accomplie, il est revenu à sa terre natale: il n'y devait pas vivre six mois.

Sophus Lie était né le 17 décembre 1842. Son père, comme celui d'Abel, était pasteur Luthérien. Dans les pays Scandinaves, le pasteur a presque toujours une place marquée dans la généalogie des hommes de la pensée. L'année 1859, Lie entrait comme étudiant à l'université de Christiania. Dans le cours des années 1869 et 1870, il étudiait les mathématiques en Allemagne, en France et en Italie. C'est pendant ce voyage qu'il noua avec F. Klein et G. Darboux des relations qui ont eu, par la suite, une si grande influence sur sa carrière scientifique. Le 1er juillet 1872, sur l'initiative de O. J. Broch et d'autres, on créa pour lui une chaire personnelle de mathématiques à l'université de Christiania. On était loin de l'époque où Gauss et Humboldt employaient leur influence à faire créer pour Abel une chaire à l'université de Berlin, sans que celui-ci eût aucun moyen de réaliser son désir ardent de se dévouer à son propre pays.

En 1886, Lie obtint un congé prolongé de l'université de Christiania pour occuper une chaire de mathématiques à l'université de Leipzig. Il n'a abandonné cette chaire en 1898 que pour rentrer à Christiania où la mort l'a terrassé en pleine force et en pleine activité.

complete

# ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

22 : 1 & 2

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1898.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.
[illegible]

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

PARIS
A. HERMANN.
[illegible]

# REDACTION

Von der philosophischen Fakultät der Georg-Augusta-Universität in Göttingen ist zur Veröffentlichung folgendes mitgetheilt:

## Beneke'sche Preisstiftung.

Am 11. März 1898, dem Geburtstage des Begründers der Preisstiftung, des Consistorialraths Carl Gustav Beneke, wurde verkündet, dass zur Preisbewerbung für das Jahr 1897 keine Preisbewerbungsschrift eingeliefert worden ist.

Zu gleicher Zeit wurde für das Jahr 1901 von der philosophischen Fakultät folgende neue Aufgabe gestellt:

»Als allgemein geltende Grundlage für die mathematische Behandlung der Naturerscheinungen ist lange Zeit hindurch das Princip der Stetigkeit oder noch specieller die Darstellung durch unbeschränkt differentiierbare Funktionen angesehen worden. Diese Grundlage wurde von den Erfindern der Differential- und Integralrechnung als etwas Selbstverständliches eingeführt; die Fortschritte der mathematischen Forschung haben aber je länger je mehr gezeigt, dass dabei eine sehr grosse Zahl stillschweigender Voraussetzungen zu Grunde lag, zu denen man bei der immer vorhandenen Ungenauigkeit unserer sinnlichen Wahrnehmungen keineswegs gezwungen ist. Auch tritt mit dem genannten Ansatze die Annahme der molecularen Constitution der Materie von Vornherein in Widerspruch. Die Fakultät wünscht eine von aktuellem wissenschaftlichen Interesse getragene Schrift, welche die hier in Betracht kommenden Fragen in allgemein verständlicher Weise darlegt und die Zulässigkeit bezw. Zweckmässigkeit der üblichen Darstellung einer eingehenden Prüfung unterwirft. Die Schrift kann mehr nach mathematischer oder philosophischer und psychologischer Seite ausholen; historische Studien sind erwünscht, werden aber nicht verlangt.«

Bewerbungsschriften sind in einer der modernen Sprachen abzufassen und bis zum 31. August 1900, auf dem Titelblatt mit einem Motto versehen, an uns einzusenden, zusammen mit einem versiegelten Briefe, der auf der Aussenseite das Motto der Abhandlung, innen Namen, Stand und Wohnort des Verfassers anzeigt. In anderer Weise darf der Name des Verfassers nicht angegeben werden. Auf dem Titelblatte muss ferner die Adresse verzeichnet sein, an welche die Arbeit zurückzusenden ist, falls sie nicht preiswürdig befunden wird. Der erste Preis beträgt 3400 M., der zweite 680 M.

Die Zuerkennung der Preise erfolgt am 11. März 1901 in öffentlicher Sitzung der philosophischen Fakultät zu Göttingen. Die gekrönten Arbeiten bleiben unbeschränktes Eigenthum ihres Verfassers.

Die Preisaufgaben, für welche die Bewerbungsschriften bis zum 31. August 1898 und 31. August 1899 einzusenden sind, finden sich in den Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften, Geschäftl. Mittheilungen 1896 S. 69, 1897 Heft I S. 26.

Göttingen, den 11. März 1898.

**Die philosophische Fakultät.**

**Der Dekan**

G. Cohn.

Herausgegeben den 20. Juli 1898. — Paru le 20 juillet 1898.

# Inhaltsverzeichniss. Table des matières.



# ACTA MATHEMATICA

ZEITSCHRIFT HERAUSGEGEBEN VON

JOURNAL RÉDIGÉ PAR

G. MITTAG-LEFFLER

22:3

STOCKHOLM
F. & G. BEIJER.
1898.

BERLIN
MAYER & MÜLLER.

PARIS
A. HERMANN.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

Herausgegeben den 21. December 1898. — Paru le 21 décembre 1898.

## Inhaltsverzeichniss. Table des matières.

Le Comité d'organisation

du Congrès international des mathématiciens

[illegible]

ZEITSCHRIFT

HERAUSGEGEBEN

VON

JOURNAL

RÉDIGÉ

PAR

G. MITTAG-LEFFLER

---

# 22: 4


STOCKHOLM

F. & G. BEIJER.

1899.

CENTRAL-TRYCKERIET, STOCKHOLM.

BERLIN

MAYER & MÜLLER

PRINZ LOUIS FERDINANDSTRASSE 2.

PARIS

A. HERMANN,

8 RUE DE LA SORBONNE.

# REDACTION

## Le Comité d'organisation

# du Congrès international des mathématiciens

### à Paris, du 6 au 12 août 1900

a émis en décembre 1898 une circulaire dont le texte est conçu comme il suit:

«La Société mathématique de France a reçu à Zurich, en 1897, la mission de préparer le prochain Congrès international des mathématiciens, qui doit avoir lieu à Paris en 1900. Elle a constitué à cet effet un Comité d'organisation qui s'est lui-même divisé en deux Commissions: *Commission administrative* (président, M. G. Darboux) et *Commission des travaux* (président, M. H. Poincaré). A l'heure actuelle, le programme détaillé du prochain Congrès international ne saurait être arrêté définitivement, mais il a été pris cependant un certain nombre de résolutions fermes que nous avons le devoir de porter à votre connaissance.

Tout d'abord, la date est fixée du lundi 6 août au dimanche 12 août 1900; le Congrès durera par conséquent sept jours.

Nous serons rattachés à l'ensemble des Congrès rentrant dans l'organisation de l'Exposition universelle, ce qui, du reste, ne nous empêchera nullement de tenir la plupart de nos séances, et surtout les séances de sections, ailleurs que dans les locaux de l'Exposition. D'après des indications que nous avons déjà, tout nous fait espérer que la Sorbonne pourra, dans ce but, nous ouvrir très gracieusement ses portes.

Le programme du Congrès comprendra: au moins deux séances générales; des séances de sections, qui auront lieu surtout le matin; des visites scientifiques; un banquet, qui réunira tous les membres du Congrès. Des excursions, facultatives, pourront être organisées et sont dès maintenant à l'étude.

Le prix de la carte du Congrès sera de *trente francs*.

Elle donnera droit:

1° A la participation à tous les travaux, à toutes les assemblées, à toutes les visites qui seront organisées;

2° Au banquet;

3° A la réception du compte rendu des travaux du Congrès, aussitôt après la publication.

Lorsqu'un membre du Congrès y viendra accompagné d'une ou plusieurs personnes de sa famille, celles-ci pourront recevoir, sur demande, des cartes spéciales à un prix réduit qui sera ultérieurement fixé.

Il est absolument impossible au Comité d'organisation de s'occuper de l'installation des membres du Congrès dans les hôtels, ni des conditions de la vie matérielle pendant le séjour à Paris. Mais, reconnaissant toute l'importance de cette question, il s'est préoccupé de donner indirectement satisfaction à ceux des membres du Congrès qui n'habitent pas Paris en temps ordinaire. A cet effet nous espérons, dans une prochaine circulaire, pouvoir vous fournir les moyens d'obtenir tous les renseignements que vous jugeriez nécessaires de vous procurer à ce sujet.

Nous vous ferons également connaître en temps utile quelles seront les conditions spéciales de faveur accordées pour les voyages par les Compagnies de transports, à l'occasion de l'Exposition universelle.

Près de deux années nous séparent encore de l'ouverture du Congrès, et il ne saurait être question de vous demander aujourd'hui une résolution ferme. Mais il est du plus haut intérêt, pour la suite de nos travaux, d'avoir au moins quelque indication sur le nombre probable des membres du Congrès de 1900. En conséquence, nous insistons d'une façon toute particulière pour que vous ayez l'obligeance de nous faire savoir vos intentions probables par une simple carte postale (que vous trouverez ci-incluse), dans les termes suivants:

*Il est probable que j'assisterai au Congrès de Paris*

(avec — personnes de ma famille).

ou

*Il n'est pas probable que j'assiste au Congrès de Paris.*

Ceci ne vous engagera en rien, à aucun point de vue, dans un sens ou dans l'autre. Ce n'est que plus tard que nous aurons à vous demander vos intentions définitives. Mais l'ensemble de ces premières indications nous sera extrêmement précieux.

Il importerait que votre réponse nous parvînt le plus tôt possible, et dans tous les cas qu'elle nous fût adressée par vous, dans les huit jours qui suivront la réception de la présente circulaire.

**Prière d'adresser toutes les communications à M. le Président de la Société mathématique de France, rue des Grands-Augustins 7, Paris. C'est lui qui est en même temps président du Comité d'organisation.»**

Herausgegeben den 8. Juni 1899. — Paru le 8 juin 1899.

## Inhaltsverzeichniss. Table des matières.



